

9044

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA
CENTRO NACIONAL DE DIDÁCTICA
DEPARTAMENTO DE TELESECUNDARIA

Material de apoyo para docentes de Telesecundaria

Geometría *Trigonometría*

Elaborado por
M.A. Ana C. Esquivel F.

2000

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA
CENTRO NACIONAL DE DIDÁCTICA
DEPARTAMENTO DE TELESECUNDARIA

Material de apoyo para docentes de Telesecundaria

Geometría

Trigonometría

Elaborado por
M.A. Ana C. Esquivel F.

2000

93



DIVISION DE PLANEAMIENTO
Y DESARROLLO EDUCATIVO

DEPARTAMENTO DE DOCUMENTACION
Y COORDINACION EDUCATIVA
M.E.P. - C.R.

9044
14 dic 2001

Índice

Índice	I
Razones trigonométricas de un triángulo	1
Triángulos especiales	4
Medición indirecta	10
Ítemes de selección	16
Respuestas	20
Bibliografía	21
Resolución de los ejercicios	22
Tabla de valores de las funciones trigonométricas	30
Semejanza y proporcionalidad	31
Semejanza de triángulos	37
Teorema de Thales	43
Ítemes de selección	52
Respuestas	57
Bibliografía	59
Resolución de los ejercicios	60
Teorema de Pitágoras	69
Teorema de la altura	76
Ítemes de selección	78
Triángulos especiales	82
Ítemes de selección	85

Respuestas	87
Bibliografía	88
Resolución de los ejercicios	90
Clasificación de un triángulo conociendo la medida de sus lados	99

Trigonometría

La palabra trigonometría significa "medida de un triángulo". Los griegos y los hindúes vieron la trigonometría como una herramienta para usar en astronomía. A los primeros matemáticos árabes se les da el crédito de haber utilizado en sus cálculos, las seis razones trigonométricas.

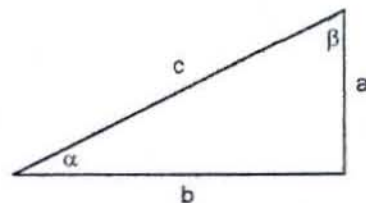
Razones trigonométricas en un triángulo.

En un triángulo rectángulo, el lado que se opone al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos**. En el triángulo rectángulo adjunto

c es la hipotenusa

a es el cateto **opuesto** al ángulo α

b es el cateto **adyacente** al ángulo α



En ese mismo triángulo:

a es el cateto **adyacente** al ángulo β

b es el cateto **opuesto** al ángulo β

En un triángulo rectángulo se definen las siguientes seis razones trigonométricas, para cada uno de los ángulos agudos. Por ejemplo, en el triángulo anterior se definen las seis razones para el ángulo α (también se pueden definir para el ángulo β):

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{csc } \alpha = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud del cateto adyacente}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud del cateto opuesto}}$$

Observando las razones anteriores podemos notar que las razones trigonométricas de la columna de la derecha son las **inversas** de las razones trigonométricas de la columna de la izquierda y viceversa.

$$\text{sen } \alpha \quad \longleftrightarrow \text{inversas} \quad \text{csc } \alpha$$

$$\cos \alpha \quad \longleftrightarrow \text{inversas} \quad \sec \alpha$$

$$\tan \alpha \quad \longleftrightarrow \text{inversas} \quad \cot \alpha$$

Es decir:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{\text{csc } \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

Nota:

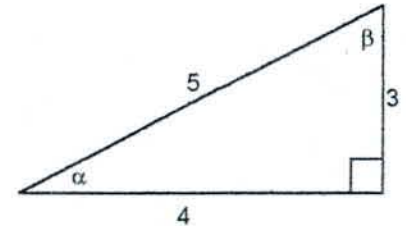
Como todos los triángulos rectángulos con un ángulo de medida α son semejantes, los valores de las razones trigonométricas dependen de la medida del ángulo y no de la longitud de los lados del triángulo.

En el triángulo de la derecha definimos las razones trigonométricas para el ángulo α como sigue:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud del cateto adyacente}} = \frac{3}{4} = 0,75$$



También podemos encontrar las razones trigonométricas del ángulo β , esto es, $\text{sen } \beta$, $\text{cos } \beta$ y $\text{tan } \beta$.

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{cos } \beta = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\text{tan } \beta = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud del cateto adyacente}} = \frac{4}{3} = 1,33$$

Observe que: $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$

$$\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta$$

$$\text{tan } \alpha = \text{cot } \beta$$

Como α y β son ángulos complementarios entonces $\beta = 90^\circ - \alpha$, por lo que podemos escribir

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \cos (90^\circ - \alpha) \\ \cos \alpha &= \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) \\ \tan \alpha &= \cot (90^\circ - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

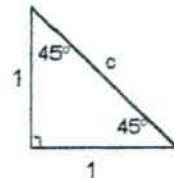
*Esto se conoce con el nombre de **cofunciones***

Triángulos especiales

Recordemos que los triángulos especiales son los triángulos rectángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ y $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ más conocidos como triángulos $30^\circ - 60^\circ$ y $45^\circ - 45^\circ$.

Consideremos el triángulo $45^\circ - 45^\circ$ cuyos catetos miden 1 unidad de longitud.

Aplicando el teorema de Pitágoras podemos calcular la longitud de la hipotenusa:



$$c^2 = 1^2 + 1^2$$

$$c^2 = 1 + 1$$

$$c^2 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$

Calculemos las razones trigonométricas del ángulo de 45°

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Si consideramos un triángulo equilátero y trazamos la bisectriz de uno de sus ángulos entonces obtenemos un triángulo rectángulo cuyos ángulos miden 30° , 60° y 90° . Además si la longitud del lado del triángulo equilátero es 2 unidades, entonces la longitud de sus otros dos lados serán 1 y $\sqrt{3}$ unidades (el cálculo se puede hacer aplicando el teorema de Pitágoras).

Las razones trigonométricas para los ángulos de 30° y de 60° , del mencionado triángulo (triángulo semiequilátero) corresponden a:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

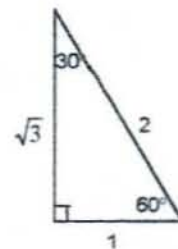
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



La siguiente tabla resume los valores encontrados:

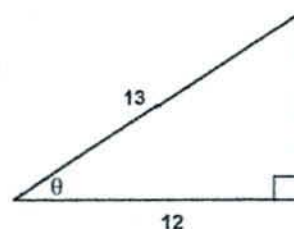
Razón trigonométrica \ Angulo	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

La tabla anterior resume los valores de las razones básicas. Sin embargo, sabiendo que la cosecante, la secante y la cotangente son las inversas del seno, coseno y tangente respectivamente, se pueden calcular fácilmente los valores de estas razones para los ángulos de 30° , 60° y 45° .

Ejercicios resueltos:

- ◆ Determine el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo θ en el triángulo rectángulo de la derecha.

Primero averiguamos la longitud del cateto opuesto al ángulo θ . Llamémoslo x



$$12^2 + x^2 = 13^2$$

$$144 + x^2 = 169$$

$$x^2 = 169 - 144$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5$$

Las razones trigonométricas¹ para el ángulo θ corresponden a:

$$\sin \theta = \frac{5}{13}$$

$$\csc \theta = \frac{13}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{13}$$

$$\sec \theta = \frac{13}{12}$$

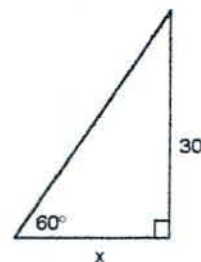
$$\tan \theta = \frac{5}{12}$$

$$\cot \theta = \frac{12}{5}$$

¹ Estas razones pueden también expresarse en forma decimal.

- ♦ Determine el valor de x en el triángulo adjunto.

En ese triángulo conocemos un ángulo, la longitud del cateto opuesto a ese ángulo y debemos averiguar la longitud del cateto adyacente. Eso nos sugiere que la razón trigonométrica que debemos usar, es la tangente



$$\tan 60^\circ = \frac{30}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{x}$$

$$x\sqrt{3} = 30$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

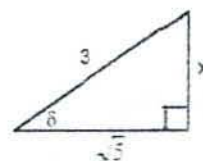
$$x = 17,32 \quad \text{o bien si racionalizamos la expresión } \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ obtenemos}$$

$$x = \frac{30\sqrt{3}}{3} \quad \text{o}$$

$$x = 10\sqrt{3}$$

- ♦ Si $\cos \delta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\angle \delta$ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, Determine la medida de los tres lados del triángulo.

Si $\cos \delta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ entonces el cateto adyacente al ángulo δ mide $\sqrt{5}$ y la hipotenusa 3. Podemos dibujar el triángulo así:



Aplicando el Teorema de Pitágoras encontramos la longitud del cateto que falta

$$(\sqrt{5})^2 + x^2 = 3^2$$

$$5 + x^2 = 9$$

$$x^2 = 9 - 5$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4}$$

$$x = 2$$

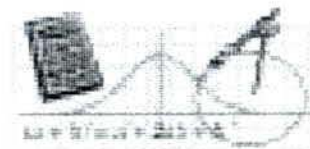
R/ Los lados del triángulo miden $\sqrt{5}$, 3 y 2 unidades.

♦ Determine el valor de la siguiente expresión (no use decimales):

$$\frac{\text{sen} 30^\circ \cos 60^\circ}{\text{sen} 60^\circ}$$

Solución:

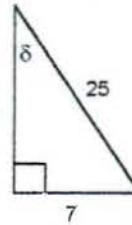
$$\frac{\text{sen} 30^\circ \cos 60^\circ}{\text{sen} 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



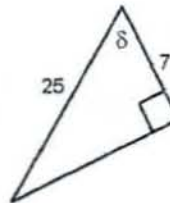
Ejercicio No. 1

1. En los siguientes triángulos rectángulos encuentre el valor de la función trigonométrica indicada, para el ángulo δ .

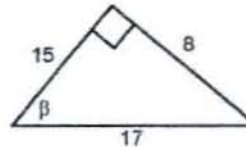
a) Encuentre $\sin \delta$, $\cos \delta$, $\tan \delta$



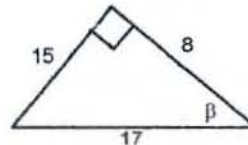
b) Encuentre $\sin \delta$, $\cos \delta$, $\tan \delta$



c) Encuentre $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\tan \beta$

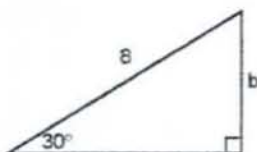


d) Encuentre $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\tan \beta$

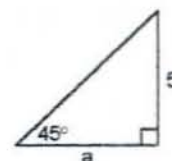


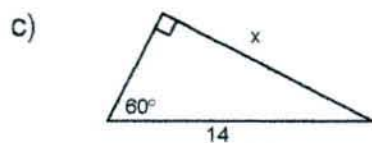
2. Encuentre el valor de la incógnita en cada uno de los siguientes triángulos:

a)



b)





3. Encuentre el valor de cada una de las expresiones siguientes (no use decimales):

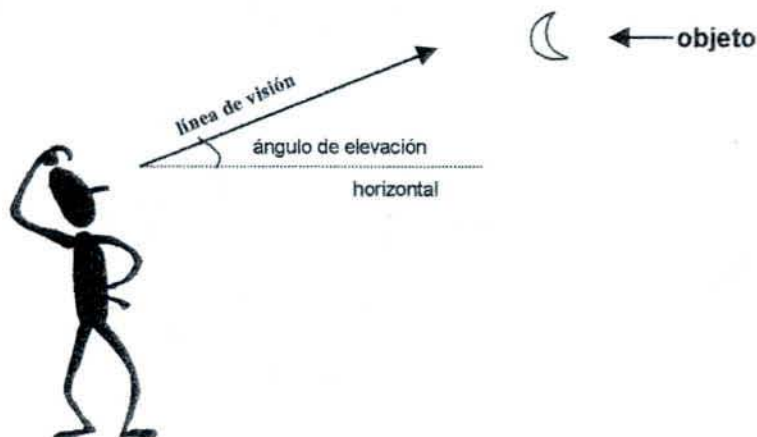
- a) $\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$
- b) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$
- c) $\tan 45^\circ + \cos 30^\circ$
- d) $\sin 30^\circ \tan 30^\circ - \cos 30^\circ$
- e) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

Medición indirecta

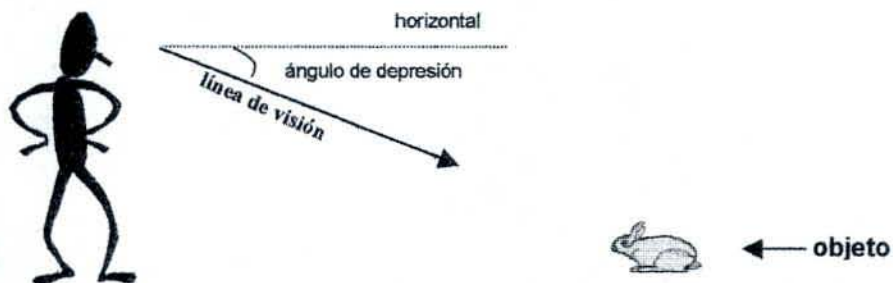
A menudo sucede que para medir ciertas distancias, por ejemplo la altura de un edificio o una montaña, se hace inconveniente y poco práctico utilizar una cinta métrica. Este tipo de distancias se miden indirectamente utilizando principios de trigonometría.

Antes de resolver algunos de estos problemas vamos a dar dos definiciones:

Se llama **ángulo de elevación** al ángulo que se forma cuando el objeto y la línea de visión están por **encima** de la horizontal.



Se llama **ángulo de depresión** al ángulo que se forma cuando el objeto y la línea de visión, están por **debajo** de la horizontal.

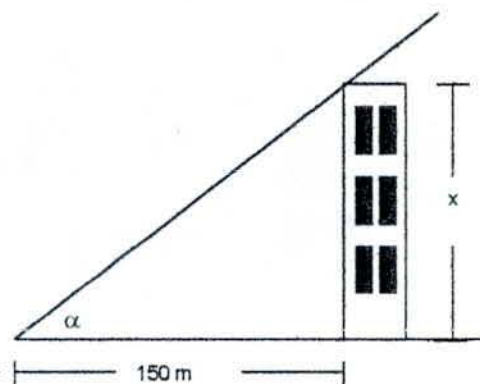


Ejercicios resueltos:

- ♦ Desde un punto sobre el suelo, situado a 150 m de la base de un edificio, el ángulo de elevación a la cúspide del mismo es de 40° . Calcular la altura del edificio.

Solución:

Lo primero que hacemos es un dibujo que ilustre la situación presentada en el problema.



Como conocemos la longitud del cateto adyacente al ángulo α , y debemos averiguar la longitud del cateto opuesto a ese mismo ángulo, entonces usaremos la tangente.

$$\tan \alpha = \frac{x}{150}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{x}{150}$$

$$\tan 40^\circ \cdot 150 = x$$

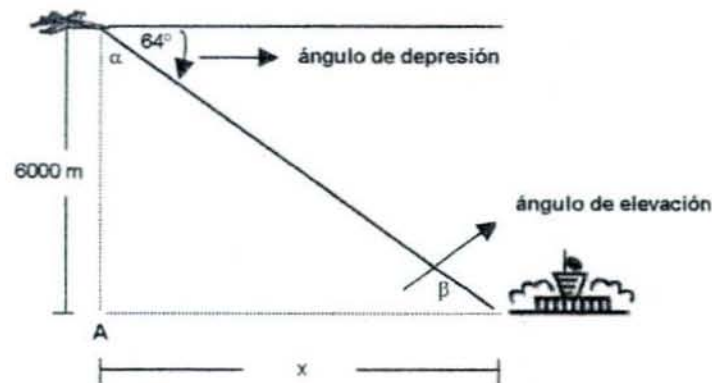
$$x = 0,84 \cdot 150$$

$$x = 126$$

R/ La altura del edificio es de 126 m.

- ♦ Un piloto volando a una altitud de 6000 m observa que el ángulo de depresión de un aeropuerto al cual se aproxima es de 64° . Calcular la distancia en tierra, desde un punto A directamente debajo del avión y hasta el aeropuerto.

Solución:



Notas:

- El ángulo de depresión y el ángulo de elevación señalados en el dibujo anterior son congruentes (alternos internos entre paralelas)
- El ángulo α es el complemento del ángulo de 64° por lo tanto mide 26° ($90^\circ - 64^\circ$)

Las notas anteriores nos permiten resolver el problema de dos formas:

$$1) \quad \tan \alpha = \frac{x}{6000}$$

$$\tan 26^\circ = \frac{x}{6000}$$

$$0,488 \cdot 6000 = x$$

$$x = 2928$$

$$2) \quad \tan \beta = \frac{6000}{x}$$

$$\tan 64^\circ = \frac{6000}{x}$$

$$\tan 64^\circ = \frac{6000}{x}$$

$$2,05 \cdot x = 6000$$

$$x = \frac{6000}{2,05}$$

$$x = 2926,8$$

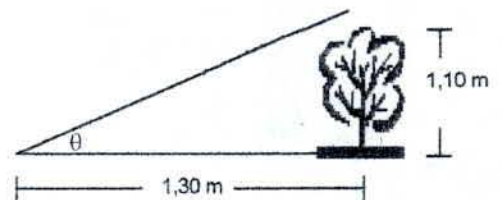
R/ La distancia es de 2926,7 m ó 2928 m

- ♦ Calcular el valor del ángulo θ en la figura adjunta

Solución:

$$\tan \theta = \frac{1,10}{1,30}$$

$$\tan \theta = 0,84615$$



$$\theta \cong 40^\circ \quad *$$

R/ La medida del ángulo θ es de aproximadamente 40°

*** Nota:**

A diferencia de los dos primeros problemas, en este último debemos encontrar la **medida del ángulo**. Si se trabaja con tablas entonces debemos buscar en la columna de la función respectiva (en nuestro caso tangente), el valor más próximo posible al que tenemos. Seguidamente consultamos la columna de los valores de los ángulos en el renglón correspondiente al valor que habíamos seleccionado. En el problema anterior el valor de la función encontrado es **$\tan \theta = 0,84615$**

En la tabla que se presenta al final del presente documento encontramos en la **columna correspondiente a tangente**, el valor 0,8391 que es el más aproximado a 0,84615. Si en ese renglón buscamos la columna de los valores de los ángulos (la que dice **grados**) entonces encontramos 40° .

Si estamos usando una calculadora y tenemos

$$\tan \theta = 0,84615$$

para averiguar el valor de θ hacemos lo siguiente:

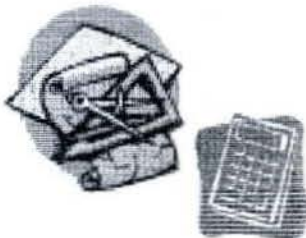
- escribimos **0,84615**
- luego la tecla **inv**
- luego **tan**

En nuestro caso después de pulsar esas teclas nos aparece 40,23 que podemos redondear a 40°

Ejercicio No. 2

Resuelva los siguientes problemas:

1. Una escalera está apoyada sobre un edificio. El ángulo que la escalera forma con el piso mide 38° . Si el largo de la escalera es de 42 m, determine la distancia del pie de la escalera al edificio.
2. Desde la cumbre de un faro de 660 m de alto, el ángulo de depresión con que se observa un bote en el mar es de 36° . Encontrar la distancia del bote al pie del faro.
3. Desde un punto sobre el suelo, situado a 120 m de la base de un árbol, el ángulo de elevación a la cúspide del árbol es de 42° . Calcular la altura del árbol.
4. Desde un punto B en el suelo, el ángulo de elevación hacia un globo mide 45° . El globo está atado a una cuerda que mide 1 500 m de longitud. ¿A qué altura se encuentra el globo del suelo?
5. Una rampa de 600 m de largo se eleva a una distancia vertical de 38 m. Encuentre la medida de su ángulo de elevación.
6. Las dimensiones de un rectángulo son 14 m y 6 m. Determine la medida del ángulo que la diagonal forma con el largo del rectángulo.



Ítemes de selección

1. En la figura de la derecha la diagonal mayor mide 50 cm y forma con el lado un ángulo de 34° . Entonces el lado del rombo mide

- () 20,73 cm
() 44,72 cm
() 30,16 cm
() 13,98 cm



2. Considere las siguientes afirmaciones:

I. $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

II. $\tan 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

III. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

De las afirmaciones anteriores son verdaderas

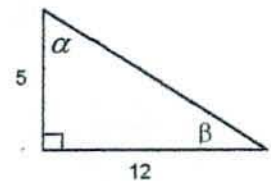
- () II y III
() I y III
() I y II
() I y III

3. Desde un balcón que se encuentra a 6 m del suelo, un joven observa un objeto bajo un ángulo de depresión de 64° . Entonces la distancia del joven al objeto es

- () 13,69 m
() 6,68 m
() 2,93 m
() 5,39 m

4. De acuerdo a la figura de la derecha, $\cos \alpha$ corresponde a

- () $\frac{12}{13}$
() $\frac{5}{12}$
() $\frac{5}{13}$
() $\frac{12}{5}$



5. De acuerdo a la figura de la derecha el cateto x mide

- () $10\sqrt{3}$ cm
() 80 cm
() $40\sqrt{3}$ cm
() 20 cm



6. Si $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces $\sec 30^\circ$ corresponde a

() $\frac{1}{2}$

() $\frac{\sqrt{3}}{2}$

() 2

() $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. En un triángulo MPN, rectángulo en P, $\tan M = \frac{8}{6}$. Entonces $\sin M$ corresponde a

() $\frac{5}{3}$

() $\frac{4}{5}$

() $\frac{3}{5}$

() $\frac{5}{4}$

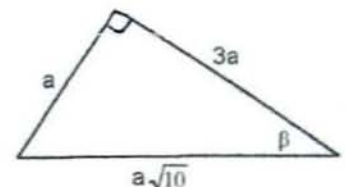
8. De acuerdo con los datos de la figura de la derecha, el valor de $\cos \beta$ corresponde a

() $\frac{3}{\sqrt{10}}$

() $\frac{1}{3}$

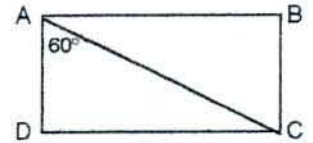
() $\frac{1}{\sqrt{10}}$

() 3



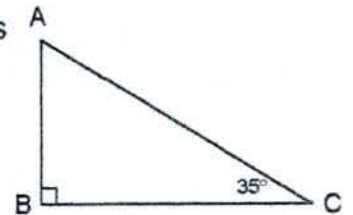
9. De acuerdo con los datos de la figura de la derecha, si $\overline{AC} = 50\text{cm}$, entonces la medida en centímetros de $\overline{AB}$ es

- () $25\sqrt{3}$
 () 25
 () $\frac{100}{\sqrt{3}}$
 () $\frac{1}{25}$



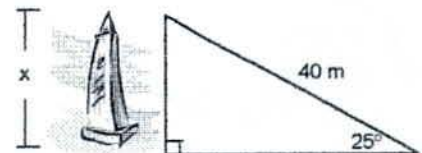
10. De acuerdo con los datos de la figura, si $\overline{AB} = 10\text{cm}$ entonces la medida en centímetros de $\overline{BC}$ es

- () 7
 () 17,54
 () 12,21
 () 14,29



11. De acuerdo con los datos de la figura, ¿cuál es el valor en metros de x ?

- () 16,90
 () 36,25
 () 18,65
 () 10,56



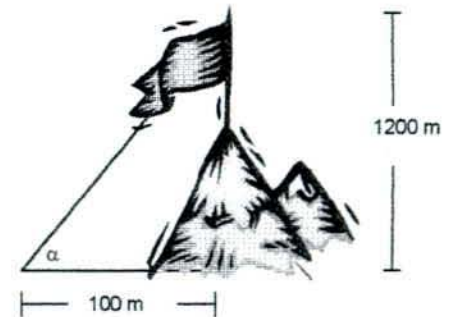
12. En el dibujo de la derecha, ¿cuál es la medida del ángulo de elevación?

() 5°

() 85°

() 21°

() 14°



Respuestas

Ejercicio No. 1, página 9

1. a) $\sin \delta = \frac{7}{25}$

$\cos \delta = \frac{24}{25}$

$\tan \delta = \frac{7}{24}$

b) $\sin \delta = \frac{24}{25}$

$\cos \delta = \frac{7}{25}$

$\tan \delta = \frac{24}{7}$

c) $\sin \beta = \frac{8}{17}$

$\cos \beta = \frac{15}{17}$

$\tan \beta = \frac{8}{15}$

d) $\sin \beta = \frac{15}{17}$

$\cos \beta = \frac{8}{17}$

$\tan \beta = \frac{15}{8}$

2. a) $b = 4$

b) $a = 5$

c) $x = 7\sqrt{3}$

3. a) $\frac{3}{2}$

b) 1

c) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio No. 2, página 15

- | | | |
|-------------|----------|----------|
| 1) 33,10 m | 2) 909 m | 3) 108 m |
| 4) 1060,5 m | 5) 4° | 6) 23° |

Ítemes de selección. Página 16

- | | | | | | |
|------|------|------|-------|-------|-------|
| 1) c | 2) b | 3) b | 4) c | 5) d | 6) d |
| 7) b | 8) a | 9) a | 10) d | 11) a | 12) b |

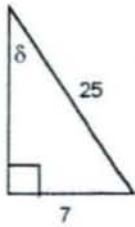
Bibliografía

- Harley, Katherine. **Prácticas de Matemática, 9° Año.** 4ª. Edición. Alajuela. Producciones Académicas Harley.
- Meneses Rodríguez, Roxana. **Matemática Enseñanza-Aprendizaje 9 Año.** 2 edición. San José, Costa Rica. Ediciones Farben S.A. 1991
- Ministerio de Educación Pública. **Antología de Matemática. Noveno Año.** San José, Costa Rica. CENADI. 2000
- Ministerio de Educación Pública. **Prueba de Tercer Ciclo 99-1. Formulario M-12**
- Nichols, E. Y otros. **Holt Álgebra 2 with Trigonometry.** United States of America. Holt, Rinehart and Winston. 1974

Resolución de los ejercicios

Ejercicio N° 1. Pág. 9

1. a)



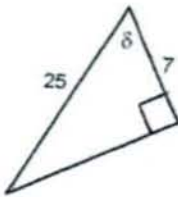
$$\begin{aligned}x^2 + 7^2 &= 25^2 \\x^2 &= 625 - 49 \\x^2 &= 576 \\x &= \sqrt{576} \\x &= 24\end{aligned}$$

$$\sin \delta = \frac{7}{25}$$

$$\cos \delta = \frac{24}{25}$$

$$\tan \delta = \frac{7}{24}$$

b)



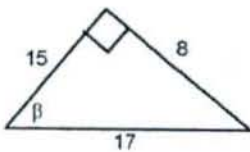
$$\begin{aligned}x^2 + 7^2 &= 25^2 \\x^2 &= 625 - 49 \\x^2 &= \sqrt{576} \\x &= 24\end{aligned}$$

$$\sin \delta = \frac{24}{25}$$

$$\cos \delta = \frac{7}{25}$$

$$\tan \delta = \frac{24}{7}$$

c)

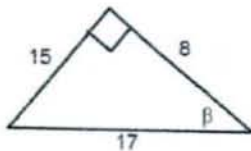


$$\sin \beta = \frac{8}{17}$$

$$\cos \beta = \frac{15}{17}$$

$$\tan \beta = \frac{8}{15}$$

d)

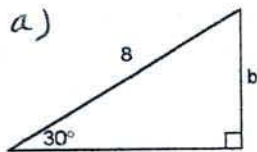


$$\sin \beta = \frac{15}{17}$$

$$\cos \beta = \frac{8}{17}$$

$$\tan \beta = \frac{15}{8}$$

2. a)



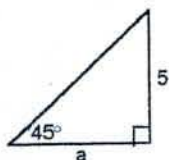
$$\sin 30^\circ = \frac{b}{8}$$

$$8 \sin 30^\circ = b$$

$$b = 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$b = 4.$$

b)



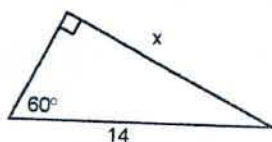
$$\tan 45^\circ = \frac{5}{a}$$

$$a \tan 45^\circ = 5$$

$$a \cdot 1 = 5$$

$$a = 5$$

c)



$$\sin 60^\circ = \frac{x}{14}$$

$$\sin 60^\circ \cdot 14 = x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14 = x$$

$$x = 7\sqrt{3}$$

3. a) $\cos 60^\circ + \tan 45^\circ =$

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

b) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ =$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

c) $\tan 45^\circ + \cos 30^\circ =$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$d) \sin 30^\circ \tan 30^\circ - \cos 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

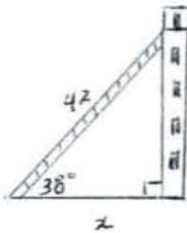
$$\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{6} = \frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$e) \frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ \tan 30^\circ} =$$

$$\frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio N° 2. Pág 15

1.



$$\cos 38^\circ = \frac{x}{42}$$

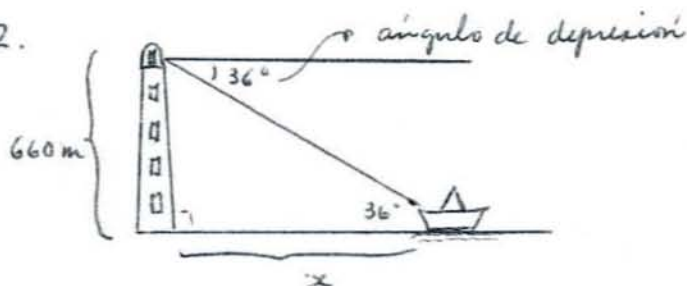
$$x = 42 \cdot \cos 38^\circ$$

$$x = 42 \cdot 0,788$$

$$x = 33,10$$

R/ La distancia del pie de la escalera al edificio es 33,10 m.

2.



$$\tan 36^\circ = \frac{660}{x}$$

$$\tan 36^\circ \cdot x = 660$$

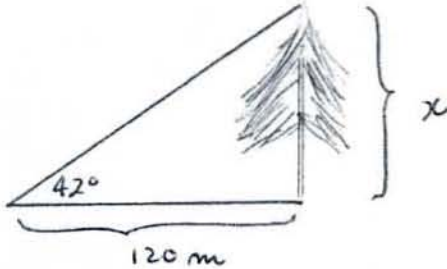
$$x = \frac{660}{\tan 36^\circ}$$

$$x = \frac{660}{0,726}$$

$$x = 909,09$$

R| La distancia del bote al pie del faro es de 909 m.

3.



$$\tan 42^\circ = \frac{x}{120}$$

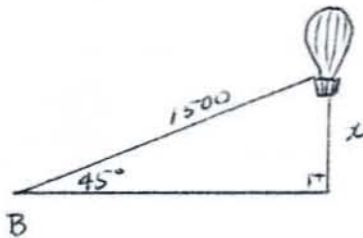
$$\tan 42^\circ \cdot 120 = x$$

$$x = 0,9 \cdot 120$$

$$x = 108$$

R| La altura del árbol es 108 m.

4.



$$\sin 45^\circ = \frac{x}{1500}$$

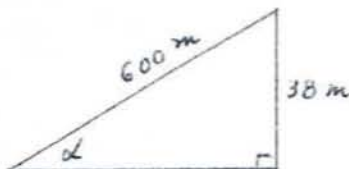
$$1500 \cdot \sin 45^\circ = x$$

$$1500 \cdot 0,707 = x$$

$$x = 1060,5$$

R| El globo se encuentra a 1060,5 m. del suelo.

5.

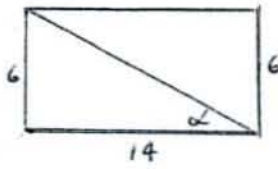


$$\sin \alpha = \frac{38}{600} \Rightarrow \sin \alpha = 0,06333$$

$$\alpha \approx 4^\circ$$

R| El ángulo de elevación es de aproximadamente 4° .

6.



$$\tan \alpha = \frac{6}{14}$$

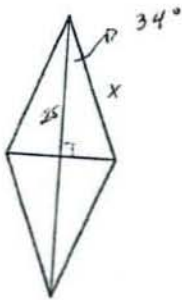
$$\tan \alpha = 0,42857$$

$$\alpha = 23,198$$

$$\alpha \approx 23^\circ$$

Temas de selección

1.



$$D = 50$$

$$\frac{D}{2} = 25$$

$$\cos 34^\circ = \frac{25}{x}$$

$$x \cdot \cos 34^\circ = 25$$

$$x = \frac{25}{\cos 34^\circ}$$

$$x = \frac{25}{0,829}$$

$$x = 30,16$$

2. I. $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ es verdadera

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

II. $\tan 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Falso porque $\tan 45^\circ = 1$

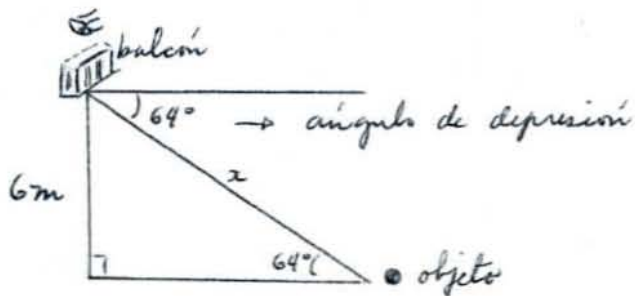
III. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Verdadera

$\therefore$ I y III son verdaderas

Nota: $\therefore$ significa "por lo tanto".

3.



$$\operatorname{sen} 64^\circ = \frac{6}{x}$$

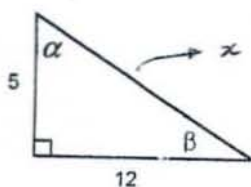
$$x = \frac{6}{\operatorname{sen} 64^\circ}$$

$$x = \frac{6}{0,89879}$$

$$x = 6,675$$

$$x \approx 6,68$$

4.



$$5^2 + 12^2 = x^2$$

$$25 + 144 = x^2$$

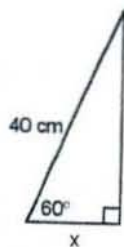
$$x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169}$$

$$x = 13$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}$$

5.



$$\cos 60^\circ = \frac{x}{40}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{40}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 40 = x \Rightarrow x = 20$$

6.

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

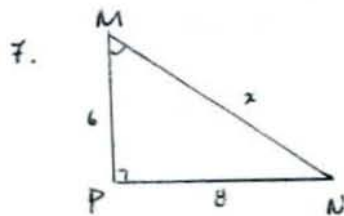
$$\sec 30^\circ = ?$$

$$\sec 30^\circ \text{ es la inversa del } \cos 30^\circ \Rightarrow \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ}$$

$$\therefore \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$$\tan M = \frac{8}{6}$$

$$\sin M = ?$$

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x^2 = 36 + 64$$

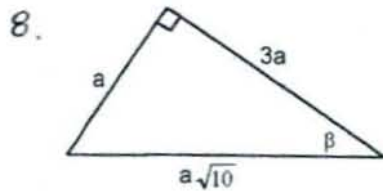
$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

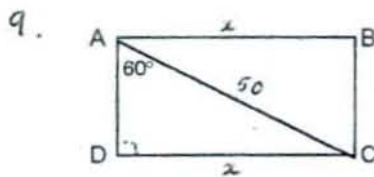
$$\sin M = \frac{8}{10}$$

$$\sin M = \frac{4}{5}$$



$$\cos \beta = \frac{3a}{a\sqrt{10}}$$

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



$$\overline{AC} = 50 \text{ cm}$$

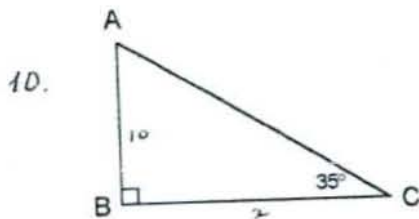
$$\overline{AB} = ?$$

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{50}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{50}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50 = x$$

$$x = 25\sqrt{3}$$



$$\overline{AB} = 10$$

$$\overline{BC} = ?$$

$$\tan 35^\circ = \frac{10}{x}$$

$$x \tan 35^\circ = 10$$

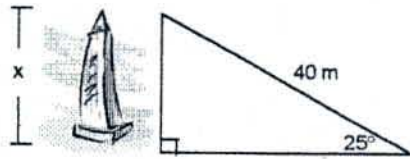
$$x = \frac{10}{\tan 35^\circ}$$

$$x = \frac{10}{0,700}$$

$$\Rightarrow x = 14,285$$

$$x \approx 14,29$$

11.



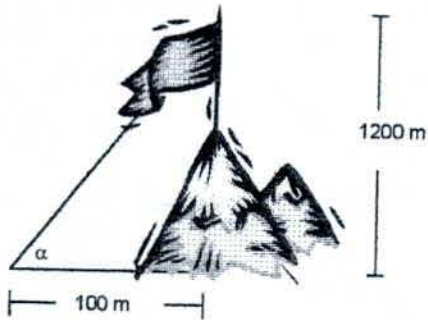
$$\sin 25^\circ = \frac{x}{40}$$

$$\sin 25^\circ \cdot 40 = x$$

$$x = 0,42261 \cdot 40$$

$$x = 16,90$$

12.



$$\tan \alpha = \frac{1200}{100}$$

$$\tan \alpha = 12$$

$$\alpha = 85,23$$

$$\alpha \approx 85^\circ$$

TABLA DE VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONÓMICAS

GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE
0	0,0000	1,0000	0,0000	46	0,7193	0,6947	1,0355
1	0,0175	0,9998	0,0175	47	0,7314	0,6820	1,0724
2	0,0349	0,9994	0,0349	48	0,7431	0,6691	1,1106
3	0,0523	0,9986	0,0524	49	0,7547	0,6561	1,1504
4	0,0698	0,9976	0,0699	50	0,7660	0,6428	1,1918
5	0,0872	0,9962	0,0875	51	0,7771	0,6293	1,2349
6	0,1045	0,9945	0,1051	52	0,7880	0,6157	1,2799
7	0,1219	0,9925	0,1228	53	0,7986	0,6018	1,3270
8	0,1392	0,9903	0,1405	54	0,8090	0,5878	1,3764
9	0,1564	0,9877	0,1584	55	0,8192	0,5736	1,4281
10	0,1736	0,9848	0,1763	56	0,8290	0,5592	1,4826
11	0,1908	0,9816	0,1944	57	0,8387	0,5446	1,5399
12	0,2079	0,9781	0,2126	58	0,8480	0,5299	1,6003
13	0,2250	0,9744	0,2309	59	0,8572	0,5150	1,6643
14	0,2419	0,9703	0,2493	60	0,8660	0,5000	1,7321
15	0,2588	0,9659	0,2679	61	0,8746	0,4848	1,8040
16	0,2756	0,9613	0,2867	62	0,8829	0,4695	1,8807
17	0,2924	0,9563	0,3057	63	0,8910	0,4540	1,9626
18	0,3090	0,9511	0,3249	64	0,8988	0,4384	2,0503
19	0,3256	0,9455	0,3443	65	0,9063	0,4226	2,1445
20	0,3420	0,9397	0,3640	66	0,9135	0,4067	2,2460
21	0,3584	0,9336	0,3839	67	0,9205	0,3907	2,3559
22	0,3746	0,9272	0,4040	68	0,9272	0,3746	2,4751
23	0,3907	0,9205	0,4245	69	0,9336	0,3584	2,6051
24	0,4067	0,9135	0,4452	70	0,9397	0,3420	2,7475
25	0,4226	0,9063	0,4663	71	0,9455	0,3256	2,9042
26	0,4384	0,8988	0,4877	72	0,9511	0,3090	3,0777
27	0,4540	0,8910	0,5095	73	0,9563	0,2924	3,2709
28	0,4695	0,8829	0,5317	74	0,9613	0,2756	3,4874
29	0,4848	0,8746	0,5543	75	0,9659	0,2588	3,7321
30	0,5000	0,8660	0,5774	76	0,9703	0,2419	4,0108
31	0,5150	0,8572	0,6009	77	0,9744	0,2250	4,3315
32	0,5299	0,8480	0,6249	78	0,9781	0,2079	4,7046
33	0,5446	0,8387	0,6494	79	0,9816	0,1908	5,1446
34	0,5592	0,8290	0,6745	80	0,9848	0,1736	5,6713
35	0,5736	0,8192	0,7002	81	0,9877	0,1564	6,3138
36	0,5878	0,8090	0,7265	82	0,9903	0,1392	7,1154
37	0,6018	0,7986	0,7536	83	0,9925	0,1219	8,1443
38	0,6157	0,7880	0,7813	84	0,9945	0,1045	9,5144
39	0,6293	0,7771	0,8098	85	0,9962	0,0872	11,4301
40	0,6428	0,7660	0,8391	86	0,9976	0,0698	14,3007
41	0,6561	0,7547	0,8693	87	0,9986	0,0523	19,0811
42	0,6691	0,7431	0,9004	88	0,9994	0,0349	28,6363
43	0,6820	0,7314	0,9325	89	0,9998	0,0175	57,2900
44	0,6947	0,7193	0,9657	90	1,0000	0,0000	—
45	0,7071	0,7071	1,0000				

Matenotitas-Noveno Año

No. 2-00

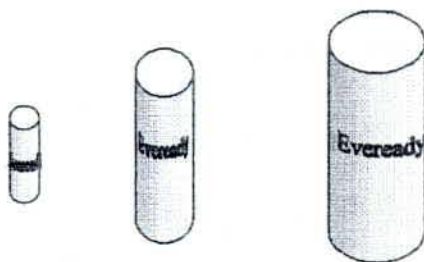
Estimados(as) compañeros(as):

Otro tema importante y por lo general de difícil comprensión para los estudiantes es el Teorema de Thales y la resolución de problemas relacionados con él. Es esta la razón del presente documento, cuyo fin es presentarle de una manera resumida, los principales aspectos del tópico en cuestión.

Antes de enunciar el Teorema de Thales es importante hablar de *semejanza* y *proporcionalidad*.

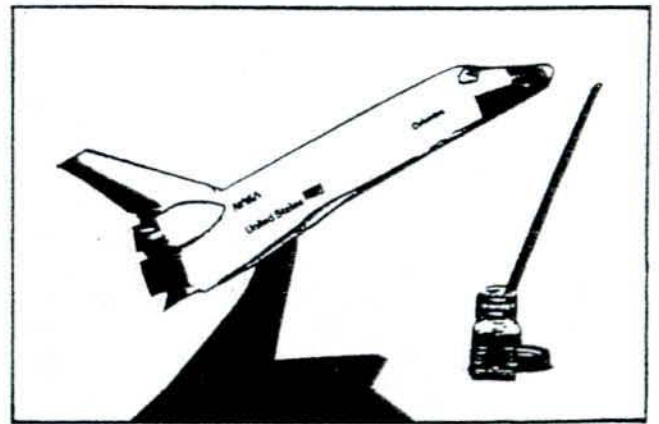
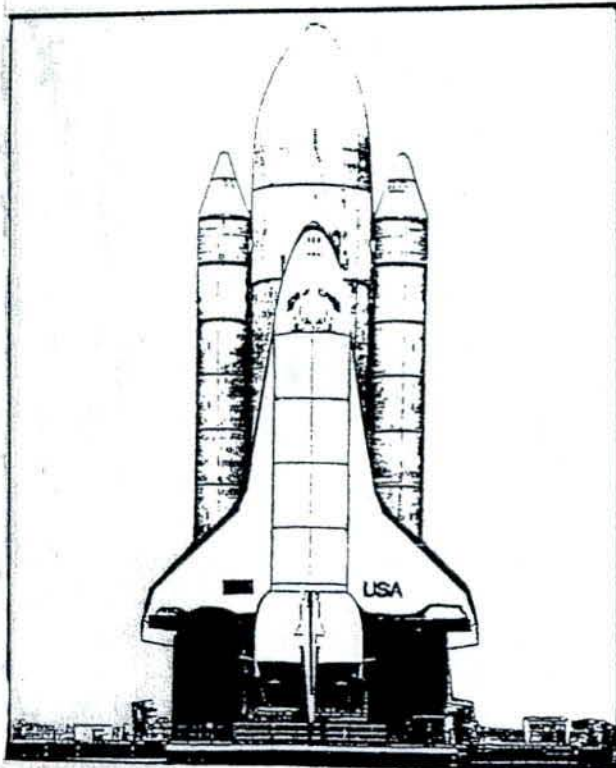
De una manera intuitiva se considera que dos objetos son semejantes si tienen la misma forma aunque no necesariamente el mismo tamaño. Por ejemplo una fotografía de la iglesia de su comunidad y la iglesia de su comunidad, podemos considerarlos como un ejemplo de dos figuras semejantes. Ellas tienen la misma forma aunque diferente tamaño. La fotografía es una reproducción de la iglesia.

Los diferentes tipos de baterías redondas A, AA, AAA son también ejemplos de figuras semejantes.



Cuando una fábrica de automóviles, barcos o aviones va a sacar al mercado un nuevo estilo, primero se hace un modelo. El automóvil, barco o avión y sus respectivos modelos son semejantes.

Antes de enviar al espacio el transbordador Columbia, primero se hizo un modelo de él. La nave espacial y su modelo, son semejantes. La siguiente es una fotografía del original y un modelo del transbordador Columbia.



Cuando vamos a un centro de fotocopiado y pedimos una reducción o ampliación de un dibujo, estamos trabajando nuevamente con el concepto de semejanza.

Cuando hacemos dibujos a escala, o mapas, también empleamos el concepto de figuras semejantes. Los mapas usualmente son trazados de tal manera, que mediante un cálculo sencillo es posible determinar la distancia entre dos puntos de una ciudad o de un país. Para ello se usa lo que se llama *escala del mapa*. Podría ser por ejemplo $1 \text{ cm} : 1 \text{ km}$. Esto significa que en el mapa cada centímetro representa 1 km. en la realidad. Por ejemplo, si medimos en el mapa la distancia entre dos puntos y nos da 3,5 cm., esto significa que en la ciudad estos puntos están separados 3,5 km.

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

14 DIC. 2001
9044

DIVISION DE PLANEAMIENTO
Y DESARROLLO EDUCATIVO

DEPARTAMENTO DE DOCUMENTACION
E INFORMACION EDUCATIVA



Razón: Se denomina razón al resultado de comparar dos cantidades. Cuando esta comparación se hace por división se llama *razón geométrica o por cociente* y es de la que nos ocuparemos ahora¹.

Por ejemplo, la razón geométrica (la llamaremos simplemente razón) entre 10 lápices y 20 lápices es

$$\frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5$$

La razón entre el número de estudiantes de una sección (24) y el número de mujeres de esa misma sección (12) es

$$\frac{24}{12}, \text{ o sea } 2$$

En una razón al primer término se le llama *antecedente* y al segundo término se le llama *consecuente*

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 8 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \textit{antecedente} \\ \longrightarrow \textit{consecuente} \end{array}$$

¹ Si la comparación se hace por resta, a esta razón se le llama *razón aritmética o por diferencia*.

Proporción: Es la igualdad de dos razones.

Por ejemplo, la razón entre 20 y 15 es

$$\frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1,33...$$

la razón entre 8 y 6 es $\frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1,33...$

Podemos decir que la razón entre 20 y 15 es la misma que, entre 8 y 6. Escribimos en tal caso

$$\frac{20}{15} = \frac{8}{6}$$

A la expresión anterior se le llama *proporción* y se lee “veinte *es a* quince *como* ocho es a seis”

Otra manera de escribir las proporciones es así

$$20 : 15 :: 8 : 6$$

Como una proporción está formada por dos razones, entonces tenemos dos antecedentes y dos consecuentes. En el caso anterior, 20 y 8 son los antecedentes y, 15 y 6 son los consecuentes.

Sin embargo, también los términos de una proporción se suelen llamar de la siguiente manera:

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier



Ejercicio No. 1:

1. Hallar la razón de cada uno de los siguientes pares de números:

- a) 70 y 14
- b) 30 y 90
- c) 39 y 13
- d) 200 y 50
- e) 4 y 16

2. Compruebe, realizando la división, si las parejas de razones que se ofrecen a continuación, permiten formar una proporción. En cada caso justifique su respuesta y si es afirmativa, escriba la proporción respectiva.

- a) $3 : 21$ y $14 : 2$
- b) $15 : 3$ y $20 : 4$
- c) $100 : 300$ y $1 : 3$
- d) $20 : 2$ y $4 : 40$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

3. Para cada una de las proporciones que aparecen a continuación, determine el producto de multiplicar los extremos, lo mismo que el de multiplicar los medios.
- a) $6 : 4 :: 9 : 6$
 - b) $15 : 6 :: 10 : 4$
 - c) $80 : 8 :: 40 : 4$
 - d) $10 : 18 :: 20 : 36$
 - e) $16 : 60 :: 8 : 30$
4. Que relación puede establecerse entre el producto de los medios y el producto de los extremos en una proporción?

Ley fundamental de las proporciones

Esta ley o propiedad fundamental de las proporciones dice que:

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos

$$a : b :: c : d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Mediante la ley fundamental de la proporciones es posible determinar un término desconocido en una proporción.

Ejemplo:

$$25 : x :: 4 : 8 \Rightarrow$$

$$4x = 25 \cdot 8$$

$$4x = 200$$

$$x = \frac{200}{4}$$

$$x = 50$$

La prueba se realiza sustituyendo el valor de la incógnita y efectuando los productos respectivos:

$$25 : 50 :: 4 : 8$$

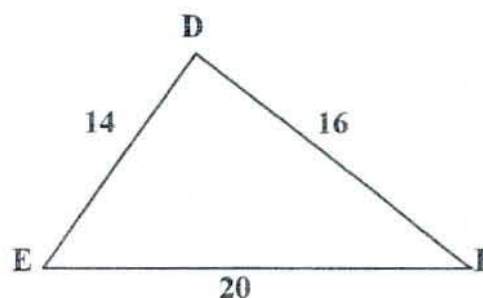
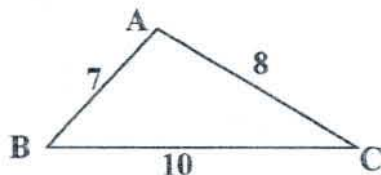
$$25 \cdot 8 = 50 \cdot 4$$

$$200 = 200$$

Semejanza de triángulos

Intuitivamente se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Esta idea debe precisarse matemáticamente.

Consideremos los siguientes triángulos



Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Si determinamos la razón entre los lados correspondientes $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ tenemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Observe que las razones entre esos lados son iguales, es decir: la razón entre 7 y 14, es la misma que entre 8 y 16, la misma que entre 10 y 20. Decimos entonces que esos lados son **proporcionales**.

Es importante tener presente que cuando se establece la correspondencia entre los lados de los triángulos, esta debe realizarse haciendo corresponder el lado de menor longitud de un triángulo con el lado de menor longitud del otro triángulo; el lado de mayor longitud de ese triángulo inicial con el lado de mayor longitud del otro triángulo, el restante lado de ese mismo triángulo inicial con el restante lado del otro triángulo. En el ejemplo anterior la correspondencia establecida fue la siguiente:

$$\overline{AB} \rightarrow \overline{DE}$$

$$\overline{BC} \rightarrow \overline{EF}$$

$$\overline{AC} \rightarrow \overline{DF}$$

Sin embargo, esta correspondencia también se puede establecer de la siguiente manera:

$$\overline{DE} \rightarrow \overline{AB}$$

$$\overline{EF} \rightarrow \overline{BC}$$

$$\overline{DF} \rightarrow \overline{AC}$$

en cuyo caso las respectivas razones serán:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{14}{7} = 2$$

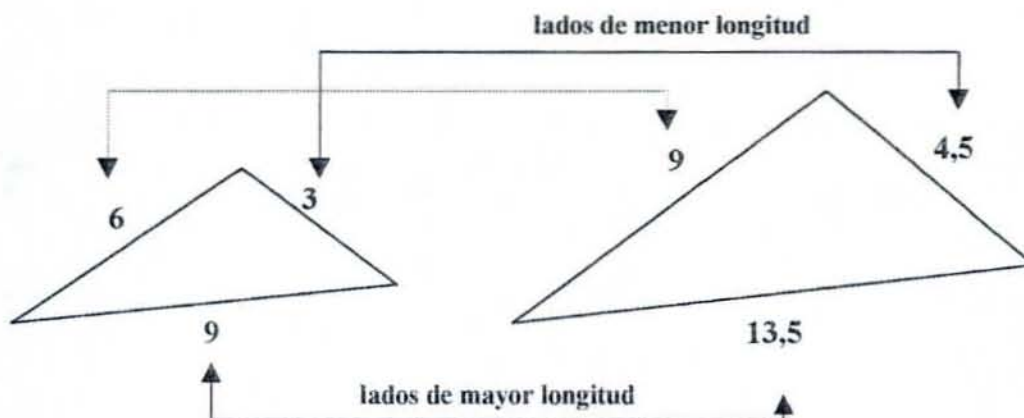
$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{16}{8} = 2$$

Observamos que las razones de nuevo son iguales y por lo tanto decimos que esos lados son proporcionales²

² Cuatro o más segmentos de recta son proporcionales si sus medidas forman una proporción.

Si consideramos los triángulos semejantes siguientes, podemos establecer la siguiente correspondencia entre lados:



Además de la correspondencia entre lados, si determinamos la medida de los ángulos correspondientes de los triángulos anteriores entre encontraremos que miden lo mismo, es decir, son congruentes.

Definición:

Dos triángulos cualesquiera son semejantes si es posible establecer una correspondencia uno a uno entre sus vértices de manera que, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

Para indicar simbólicamente que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes, escribimos

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

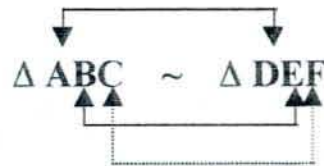
Las relaciones entre lados y ángulos correspondientes, que se derivan de la expresión

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

se obtienen de la siguiente manera:

las dos primeras letras del primer triángulo con las dos primeras letras del segundo triángulo (considerando ΔABC como el primer triángulo y ΔDEF como el segundo); las dos últimas letras del primer triángulo con las dos últimas letras del segundo triángulo; la primera y la tercera letras del primer triángulo con la primera y tercera letras del segundo triángulo.

En cuanto a los ángulos sería



$$\angle A \leftrightarrow \angle D$$

$$\angle B \leftrightarrow \angle E$$

$$\angle C \leftrightarrow \angle F$$

Si tenemos entonces que dados dos triángulos MNP y TRS , $\Delta MNP \sim \Delta TRS$ podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{TS}} \quad \text{además} \quad \angle M \cong \angle T, \angle N \cong \angle R, \angle P \cong \angle S$$

Criterios de semejanza

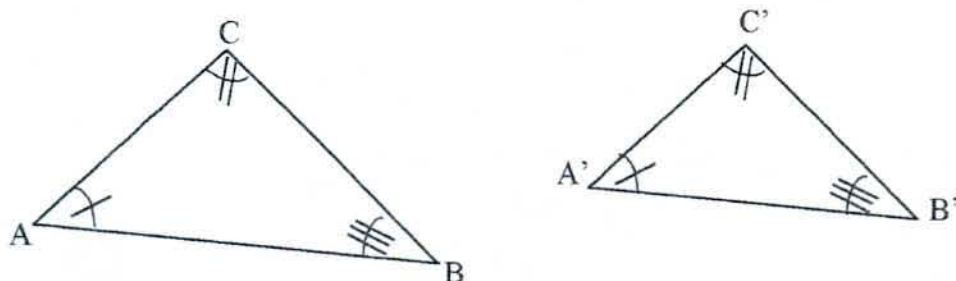
Aunque la definición de triángulos semejantes establece seis condiciones para que dos triángulos sean semejantes, en algunos casos no es necesario probar las seis, pues el hecho de que se cumplan tres, por ejemplo, implica que las otras automáticamente se cumplen. Es así como tenemos los siguientes criterios de semejanza.

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

1. A.A.A. (ángulo, ángulo, ángulo)

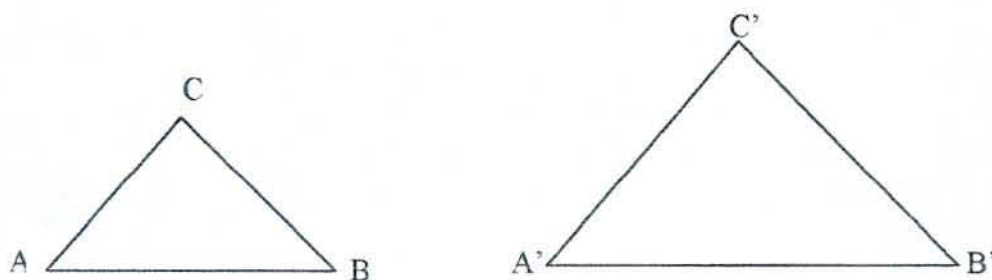
Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes congruentes



$$\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

2. L.L.L. (lado, lado, lado)

Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.



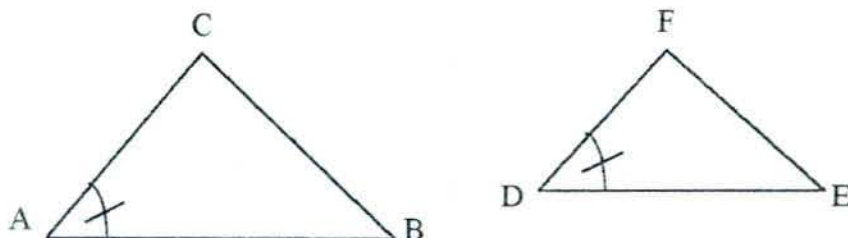
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

3. L.A.L. (lado, ángulo, lado)

Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos por esos lados son congruentes entonces los triángulos son semejantes.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}, \angle A \cong \angle D \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

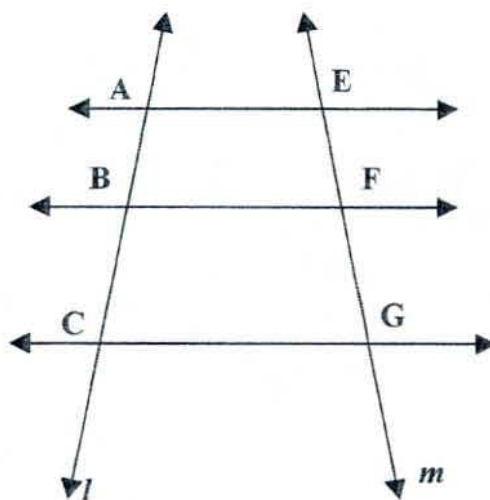
Thales de Mileto (640-546 a.C.) fue conocido como uno de los siete sabios de la antigua Grecia. Llamado el padre del razonamiento deductivo, él introdujo en Grecia el estudio de la Geometría. Fue matemático, maestro, filósofo, astrónomo, un suspicaz hombre de negocios y el primer geómetra que probó sus teorías paso a paso.



Thales predijo correctamente un eclipse solar en el año 585 a.C., y asombró a los egipcios cuando calculó la altura de la Gran Pirámide usando sombras y triángulos semejantes.

Teorema de Thales

“Si tres o más rectas paralelas intersecan dos rectas transversales, los segmentos correspondientes determinados sobre las rectas transversales, son proporcionales”.



$\longleftrightarrow \longleftrightarrow \longleftrightarrow$
 $AE \parallel BF \parallel CG$, l y m son rectas transversales, entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$$

En la figura de la derecha tenemos que:

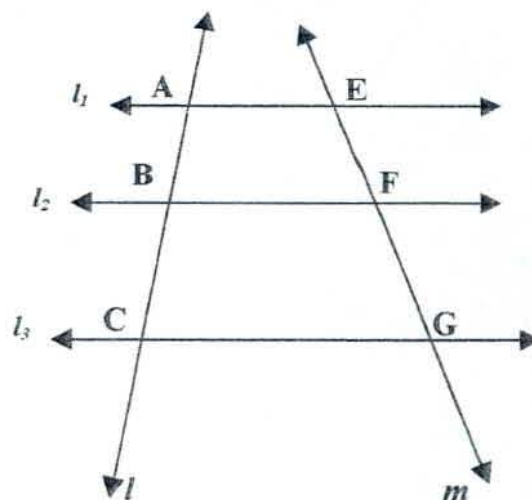
l y m son rectas transversales

$$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$$

$$\overline{AB} = 8cm \quad \overline{BC} = 12cm$$

$$\overline{EF} = 16cm \quad \overline{FG} = 24cm$$

Para: Profesores de Telesecundaria



De: Ana C. Esquivel Fournier

La razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ corresponde a $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{8}{12} = \frac{4}{3}$

La razón entre $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$ corresponde a $\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{16}{24} = \frac{4}{3}$

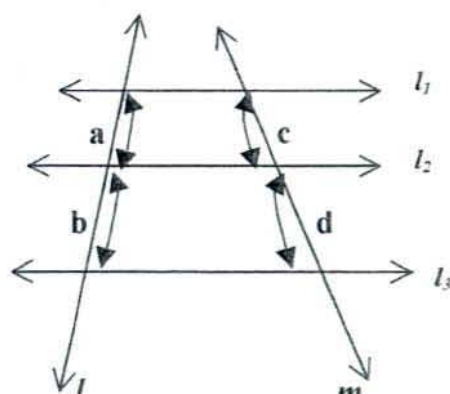
Como podemos observar las razones entre esos segmentos de recta son iguales, por lo tanto los segmentos de recta son proporcionales.

Por las propiedades de las proporciones algunas otras relaciones que se pueden dar entre esos segmentos de recta se detallan a continuación:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

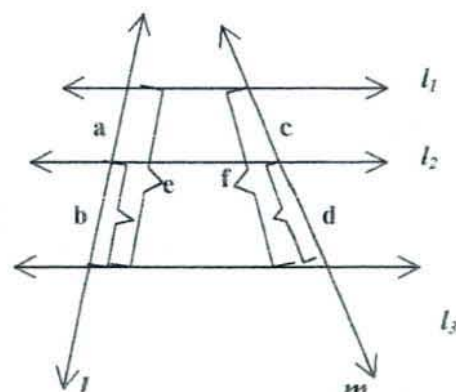
$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$



Si llamamos $a + b$ con e , y $c + d$ con f , entonces podemos establecer también las siguientes proporciones

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{o sea} \quad \frac{e}{b} = \frac{f}{d}$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \quad \text{ó} \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$$



A manera de resumen podemos decir que las relaciones entre los segmentos de recta que determinan dos rectas transversales en rectas paralelas, se dan en dos direcciones: una *horizontal* y otra *vertical*.

Vertical	Horizontal
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$
$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$	

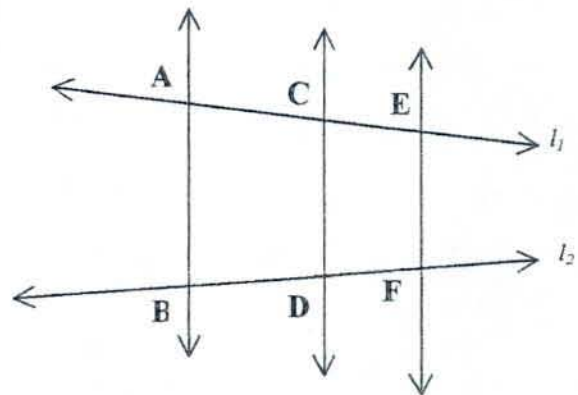
Aplicación a problemas

1. En el dibujo de la derecha $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$,
 l_1 y l_2 son transversales a las rectas anteriores.

Si $\overline{CE} = 6\text{ cm}$, $\overline{BD} = 18\text{ cm}$,
 $\overline{DF} = 9\text{ cm}$. Encontrar la medida de $\overline{AC}$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AC}}{18} = \frac{6}{9} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{18 \cdot 6}{9} = \frac{108}{9} = 12$$



Respuesta: La medida de $\overline{AC}$ es 12 cm

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Nota:

La anterior no es la única forma de establecer la proporción. Pruebe con sus estudiantes otras proporciones que permitan resolver ese problema.

2. Determine el valor de $\overline{DE}$ en la figura de la derecha sabiendo que $\overline{AC} = 40\text{ cm}$, $\overline{BC} = 32\text{ cm}$, $\overline{EF} = 24\text{ cm}$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} \Rightarrow$$

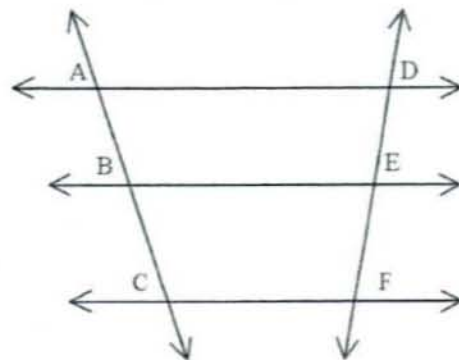
$$\frac{40}{32} = \frac{\overline{DF}}{24} \Rightarrow$$

$$\overline{DF} = \frac{40 \cdot 24}{32} \Rightarrow \overline{DF} = \frac{960}{32} \Rightarrow \overline{DF} = 30$$

$$\overline{DE} = \overline{DF} - \overline{EF}$$

$$\overline{DE} = 30 - 24$$

$$\overline{DE} = 6$$



Respuesta: $\overline{DE}$ mide 6 cm

Otra forma es averiguar primero la medida de $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$$

$$\overline{AB} = 40 - 32$$

$$\overline{AB} = 8$$

Seguidamente establecemos la proporción

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

$$\frac{8}{32} = \frac{\overline{DE}}{24} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{8 \cdot 24}{32} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{192}{32}$$

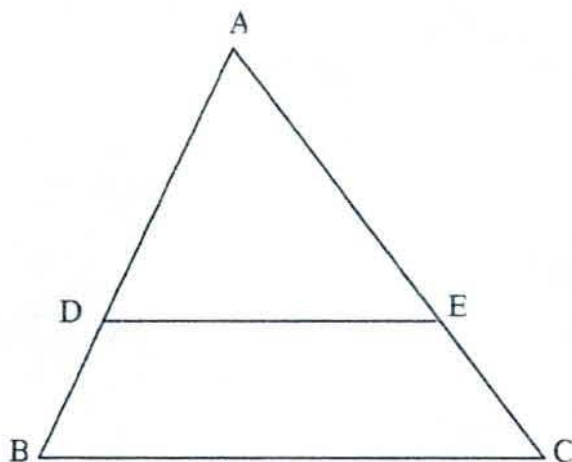
$$\overline{DE} = 6$$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Teorema derivado del Teorema de Thales

“Un segmento de recta paralelo a un lado de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero”.

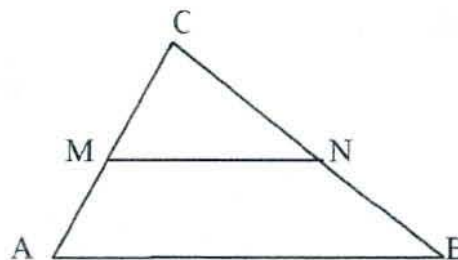


$$\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Aplicaciones

1. En la figura de la derecha $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

- a) Si $\overline{MC} = 20$, $\overline{AC} = 24$, $\overline{NC} = 15$
Calcule $\overline{BC}$



Solución:

$$\text{Como } \triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}}$$

$$\Rightarrow \frac{24}{20} = \frac{\overline{BC}}{15}$$

$$\Rightarrow 24 \cdot 15 = 20 \cdot \overline{BC}$$

$$\Rightarrow 20\overline{BC} = 360$$

Para: Profesores de Telesecundaria

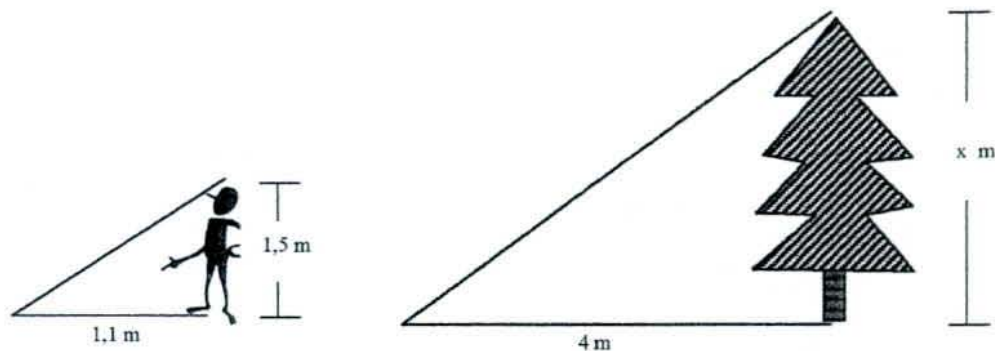
De: Ana C. Esquivel Fournier

$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{360}{20}$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 18$$

2. Encontrar la altura de un árbol que proyecta una sombra de 4 m, sabiendo que a la misma hora una persona de 1,5 m de estatura, proyecta una sombra de 1,1 m.

Solución:



Establecemos la proporción: $\frac{1,5}{x} = \frac{1,1}{4}$

$$\Rightarrow 4 \cdot 1,5 = 1,1x$$

$$\Rightarrow \frac{6}{1,1} = x$$

$$\Rightarrow x = 5,45$$

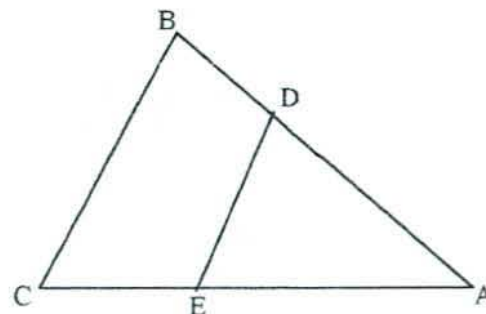
Respuesta: La altura del árbol es 5,45 m

3. En la figura de la derecha $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$$\text{Si } \overline{AB} = 12 \text{ cm, } \overline{AD} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{DE} = 6 \text{ cm, } \overline{AC} = 18 \text{ cm.}$$

Encontrar la medida de $\overline{BC}$ y $\overline{CE}$



Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Solución:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{\overline{BC}}{6}$$

$$\Rightarrow 8 \overline{BC} = 12 \cdot 6$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{12 \cdot 6}{8}$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{72}{8}$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 9$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{18}{\overline{AE}}$$

$$\Rightarrow 12 \overline{AE} = 8 \cdot 18$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \frac{8 \cdot 18}{12}$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \frac{144}{12}$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = 12$$

$$\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE}$$

$$\overline{EC} = 18 - 12$$

$$\overline{EC} = 6$$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

También $\overline{EC}$ puede calcularse mediante la proporción

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{18}{\overline{EC}}$$

$$\Rightarrow 12 \overline{EC} = 4 \cdot 18$$

$$\Rightarrow \overline{EC} = \frac{4 \cdot 18}{12}$$

$$\Rightarrow \overline{EC} = \frac{72}{12}$$

$$\Rightarrow \overline{EC} = 6$$

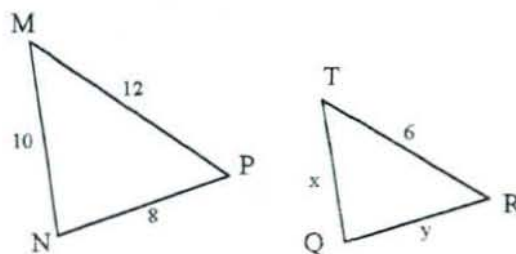
$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$$

$$\overline{DB} = 12 - 8$$

$$\overline{DB} = 4$$

Práctica:

1. Encontrar el valor de x y y en la figura adjunta, sabiendo que $\triangle MNP \sim \triangle TQR$



2. Carlos fue a un centro de fotocopiado y solicitó una ampliación de un mapa de Costa Rica. Si las dimensiones del original son 4 cm por 9 cm, determine el ancho de la ampliación sabiendo que el largo es 18 cm.

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

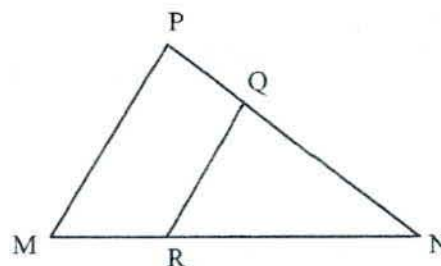
3. En el $\triangle MNP$, $\overline{QR} \parallel \overline{PM}$.

a) Si $\overline{PN} = 12$, $\overline{QN} = 4$ y $\overline{MN} = 24$
Encuentre $\overline{NR}$.

b) Si $\overline{PN} = 15$, $\overline{PQ} = 3$ y $\overline{MN} = 25$
Encuentre $\overline{MR}$.

c) Si $\overline{PQ} = 6$, $\overline{QN} = 4$ y $\overline{NR} = 7$
Encuentre $\overline{MN}$.

d) Si $\overline{QN} = 8$, $\overline{PN} = 18$ y $\overline{MR} = 6$
Encuentre $\overline{NR}$.



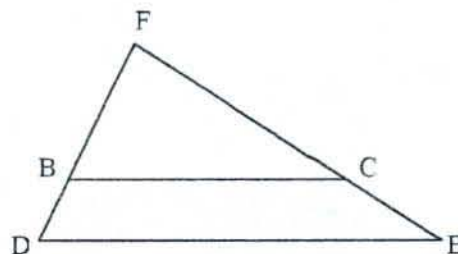
4. Si los segmentos de la figura de la derecha, tienen las longitudes indicadas,
¿será $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$? Justifique su respuesta.

a) $\overline{DF} = 20$ $\overline{BF} = 16$

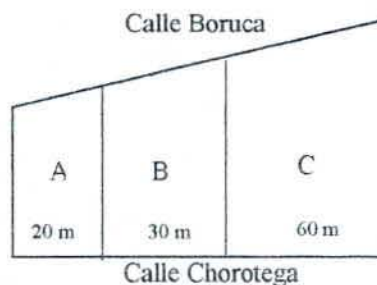
$\overline{FE} = 30$ $\overline{FC} = 25$

b) $\overline{DF} = 18$ $\overline{BF} = 4$

$\overline{FE} = 9$ $\overline{CE} = 7$



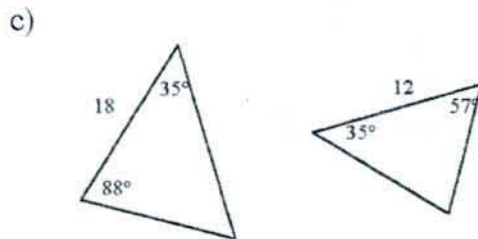
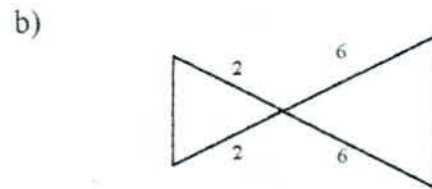
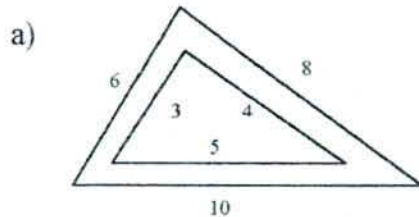
5. Tres lotes se extienden desde la Calle Chorotega hasta la Calle Boruca, según se muestra en la ilustración. Los lindes laterales, son segmentos perpendiculares a la Calle Chorotega. Si el frente total de los lotes en la Calle Boruca mide 180 m, encuentre la medida del frente de cada lote en dicha calle.



Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

6. Para cada uno de los siguientes pares de triángulos, diga si los dos triángulos son semejantes o no. En caso de que lo sean especifique el criterio de semejanza que justifica su respuesta.

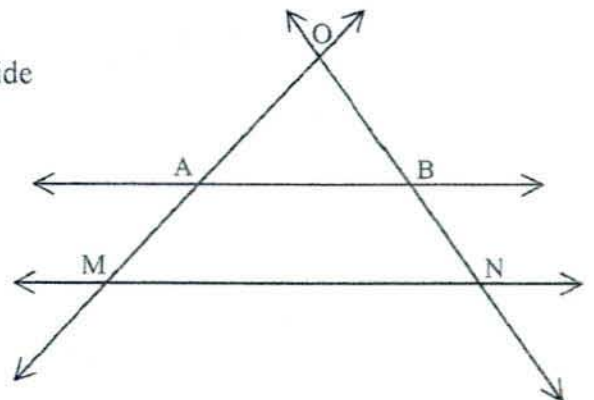


Ítemes de selección

1. En la figura de la derecha $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$.

Si $\overline{OA} = 20$, $\overline{OB} = 16$, $\overline{ON} = 12$. Entonces $\overline{OM}$ mide

- () 9,6
() 26,6
() 15
() 5

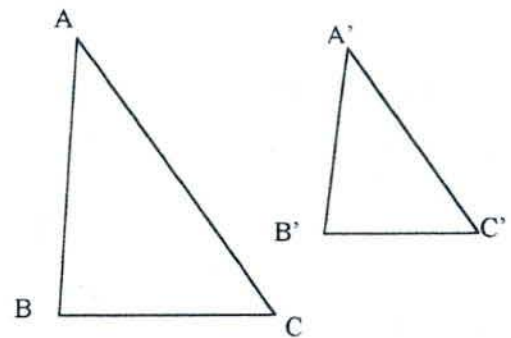


Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

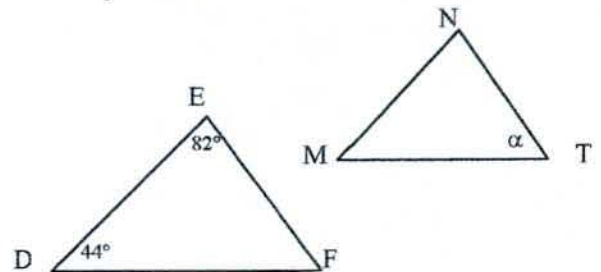
2. Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ semejantes. Si el perímetro del $\triangle ABC$ es 36 cm y el del $\triangle A'B'C'$ es 24 cm, y $\overline{B'C'} = 10$ cm, entonces la medida de $\overline{BC}$ es

- () 86,4 cm
() 6,66 cm
() 10 cm
() 15 cm



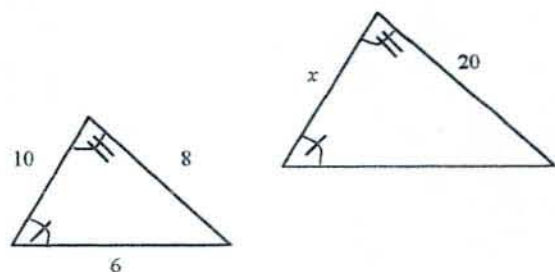
3. Si $\triangle DEF \sim \triangle MNT$ entonces la medida del ángulo α corresponde a

- () 54°
() 82°
() 90°
() 44°



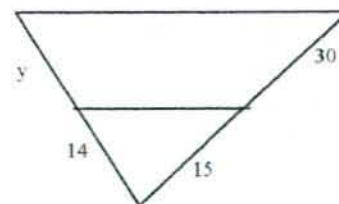
4. Si los triángulos de la derecha son semejantes, entonces el valor de x corresponde a

- () 24
() 16
() 4
() 25



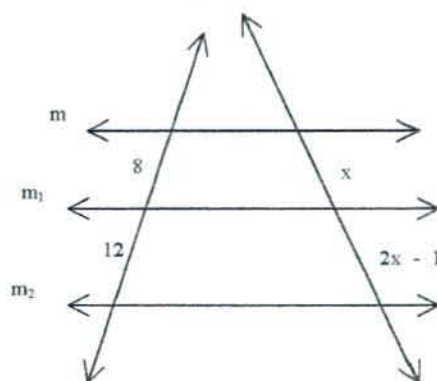
5. En la figura de la derecha el valor de y corresponde a

- () 14
- () 28
- () 15
- () 45



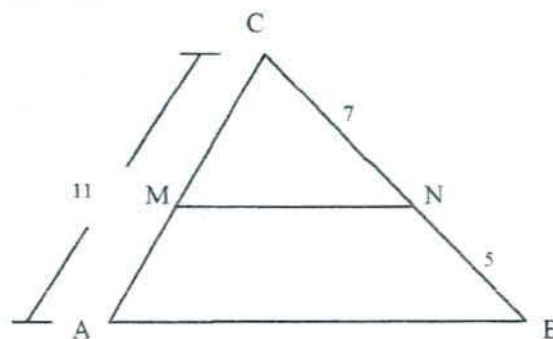
6. El valor de x en la figura de la derecha es

- () 3
- () 2
- () 5
- () 20



7. De acuerdo con los datos de la figura, si $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, entonces la medida de $\overline{AM}$ corresponde a

- () $\frac{132}{5}$
- () $\frac{60}{11}$
- () $\frac{55}{12}$
- () $\frac{77}{5}$

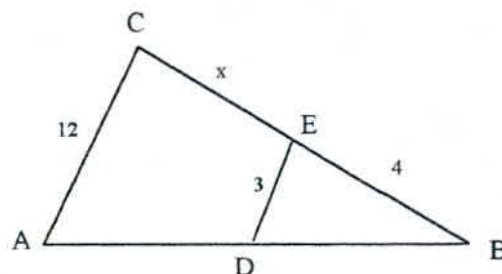


8. Las medidas de los lados de un triángulo son 36 cm, 42 cm y 28 cm respectivamente. Si el lado mayor de otro triángulo semejante al anterior mide 63 cm, entonces el lado menor mide en centímetros

- () 42 cm
() 63 cm
() 54 cm
() 18,6 cm

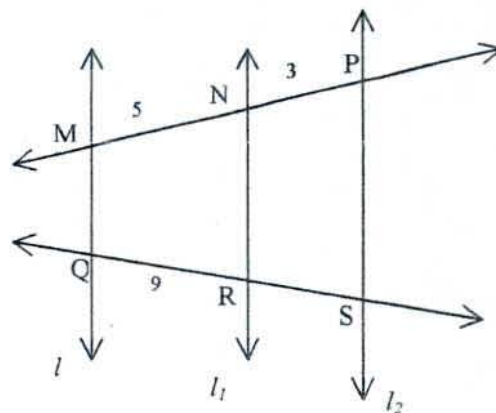
9. De acuerdo con los datos de la figura, si $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, entonces la medida de $\overline{CE}$ corresponde a

- () 16
() 3
() 12
() 8



10. En la figura de la derecha $l \parallel l_1 \parallel l_2$, entonces la medida de $\overline{QS}$ corresponde a

- () $\frac{45}{8}$
() $\frac{8}{9}$
() $\frac{72}{5}$
() $\frac{40}{9}$

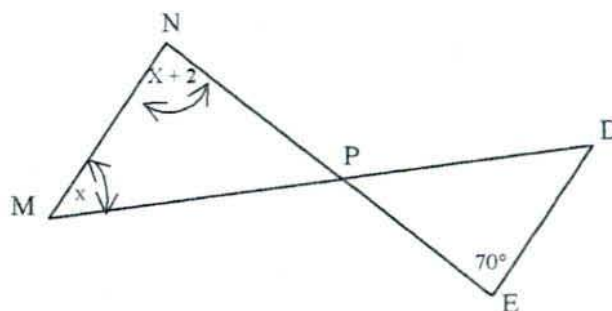


Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

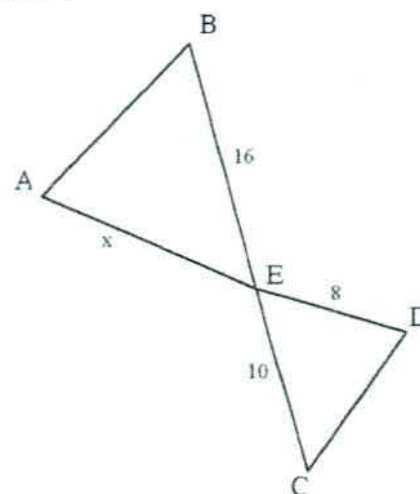
11. De acuerdo con los datos de la figura, si $\triangle MNP \sim \triangle DEP$, entonces $\angle NMP$ mide

- () 70
() 68
() 72
() 42



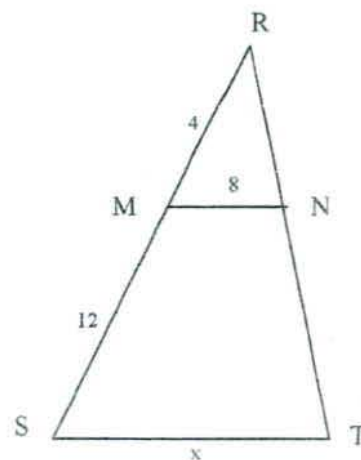
12. En la figura de la derecha $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, ¿cuál es la medida de $\overline{AE}$?

- () 20
() $\frac{8}{5}$
() 5
() $\frac{64}{5}$



13. De acuerdo con la figura de la derecha si $\overline{MN} \parallel \overline{ST}$ entonces el valor de x corresponde a

- () 8
() 32
() 2
() 16



Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

14. Un árbol de 8 m de alto proyecta una sombra de 5,4 m, al mismo tiempo que la sombra de una persona es de 0,9 m. La estatura de la persona es

() 0,81 m

() 1,33 m

() 1,20 m

() 1 m

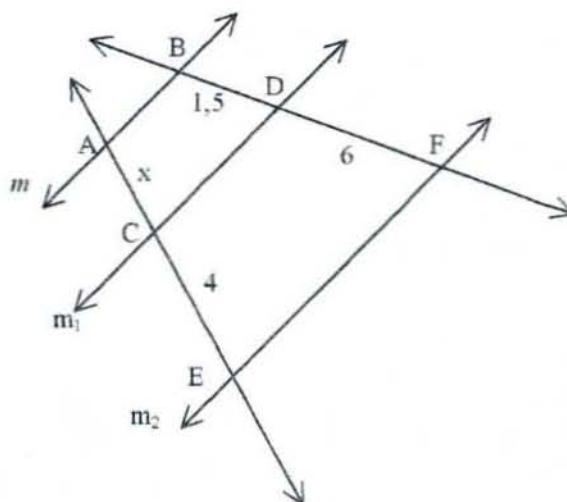
15. En la figura de la derecha $m \parallel m_1 \parallel m_2$, entonces la medida de $\overline{AE}$ corresponde a

() 1

() 7,5

() 16

() 5



RESPUESTAS

Ejercicio No. 1. Página 35

1. a) 5 b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) 4 e) $\frac{1}{4}$

2. a) No, porque las razones son diferentes b) Si, porque las razones son iguales
c) Si, porque las razones son iguales c) No, porque las razones son diferentes

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

3. a) extremos 36, medios 36 b) extremos 60, medios 60
 c) extremos 320, medios 320 d) extremos 360, medios 360
 e) extremos 480, medios 480
4. Son iguales

Práctica. Página 50

1. $x = 5$ $y = 4$
2. El ancho es 8 cm
3. a) $\overline{NR} = 8$ b) $\overline{MR} = 5$ c) $\overline{MN} = 17,5$ d) $\overline{NR} = 4,8$
4. a) $\overline{BC}$ no es paralela a $\overline{DE}$
 b) $\overline{BC}$ es paralela a $\overline{DE}$
5. lote A mide 32,72m
 lote B mide 49,09
 lote C mide 98,18
6. a) Si (L.L.L.) b) Si (A.A.A.) c) Si (A.A.A.)

Ítemes de selección. Página 52

1. C 2. D 3. A 4. D 5. B 6. B 7. C 8. A
9. C 10. C 11. B 12. D 13. B 14. B 15. A

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Bibliografía

- ✎ Bolaños, G. y Ríos, M. **Matemática Activa, Noveno Año.** 1 ed. San José, Costa Rica. Textos Modernos Cattleya
- ✎ Harley, Katherine. **Prácticas de Matemática, 9º Año.** 4a. edición. Alajuela. Producciones Académicas Harley
- ✎ Meneses Rodríguez, Roxana. **Matemática Enseñanza-Aprendizaje 9 Año.** 2 edición. San José, Costa Rica. Ediciones Farben S.A. 1991
- ✎ Ministerio de Educación Pública. **Prueba de Tercer Ciclo 98-1. Formulario M-12**
- ✎ Ministerio de Educación Pública. **Prueba de Tercer Ciclo 99-1. Formulario M-12**
- ✎ Pappas, Theoni. **The Joy of Mathematics.** 4th edition. San Carlos, California. Wide World Publishing/Tetra. 1989
- ✎ Rodríguez C. y Suazo M. **Geometría.** Illinois, USA. Scott, Foresman and Co. 1989
- ✎ Moise, Edwin y Downs, Floyd. **Serie Matemática Moderna. Geometría.** 2da. edición. Cali, Colombia. Editorial Norma. 1972

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Resolución de los ejercicios

Ejercicio N° 1 Pág. 5

1. a) $\frac{70}{14} = 5$

b) $\frac{30}{90} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{39}{13} = 3$

d) $\frac{200}{50} = 4$

e) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

2. a) $3 : 21 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$14 : 2 = \frac{14}{2} = 7$

> son diferentes, no se puede formar una proporción con ellas.

b) $15 : 3 = \frac{15}{3} = 5$

$20 : 4 = \frac{20}{4} = 5$

si es posible formar una proporción porque las razones son iguales.

$$15 : 3 :: 20 : 4$$

c) $100 : 300 = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$

$1 : 3 = \frac{1}{3}$

si es posible formar una proporción porque las razones son iguales

$$100 : 300 :: 1 : 3$$

d) $20 : 2 = \frac{20}{2} = 10$

$4 : 40 = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

no es posible formar una proporción porque las razones no son iguales.

3. a) $6 : 4 :: 9 : 6$

$$6 \cdot 6 = 36$$

$$4 \cdot 9 = 36$$

$$b) \quad 15 : 6 :: 10 : 4$$

$$15 \cdot 4 = 60$$

$$6 \cdot 10 = 60$$

$$c) \quad 80 : 8 :: 40 : 4$$

$$80 \cdot 4 = 320$$

$$8 \cdot 40 = 320$$

$$d) \quad 10 : 18 :: 20 : 36$$

$$10 \cdot 36 = 360$$

$$18 \cdot 20 = 360$$

$$e) \quad 16 : 60 :: 8 : 30$$

$$16 \cdot 30 = 480$$

$$60 \cdot 8 = 480$$

4. Que son iguales

Práctica - Pág. 20

$$1. \quad \frac{10}{x} = \frac{12}{6} \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot 6 = x \cdot 12$$

$$\Rightarrow \quad 60 = 12x$$

$$x = \frac{60}{12}$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

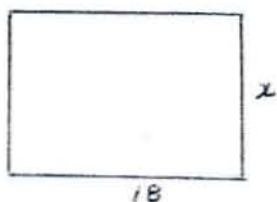
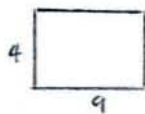
$$\frac{8}{y} = \frac{12}{6} \quad \Rightarrow$$

$$12y = 8 \cdot 6$$

$$y = \frac{48}{12}$$

$$\underline{\underline{y = 4}}$$

2.



$$\frac{4}{x} = \frac{9}{18} \Rightarrow$$

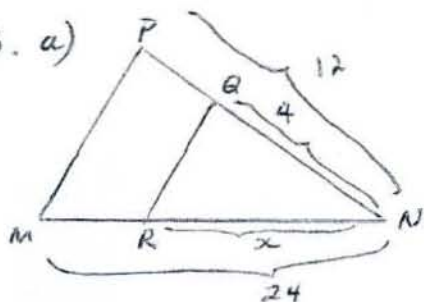
$$9x = 4 \cdot 18$$

$$x = \frac{4 \cdot 18}{9}$$

$$\underline{x = 8.}$$

R/ El ancho de la ampliación es 8 cm

3. a)



$$\frac{12}{4} = \frac{24}{x}$$

 $\Rightarrow$

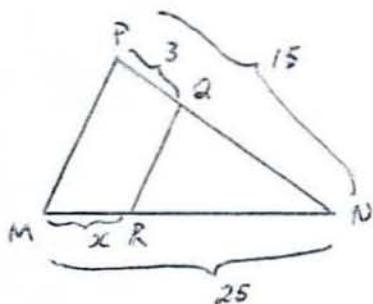
$$12x = 24 \cdot 4$$

$$x = \frac{24 \cdot 4}{12}$$

$$x = 8$$

$$R/ \overline{NR} = 8$$

b)



$$\frac{15}{3} = \frac{25}{x}$$

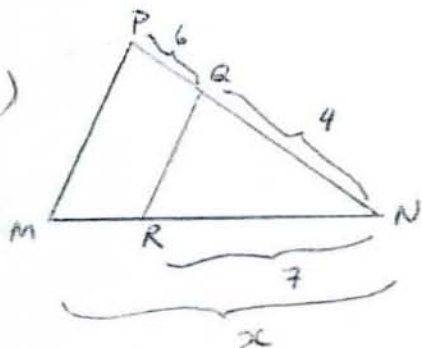
$$\Rightarrow 15x = 3 \cdot 25$$

$$x = \frac{3 \cdot 25}{15}$$

$$x = 5$$

$$R/ \overline{MR} = 5$$

c)



$$\overline{PN} = 6 + 4 = 10$$

$$\Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{x}{7}$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 7 = 4x$$

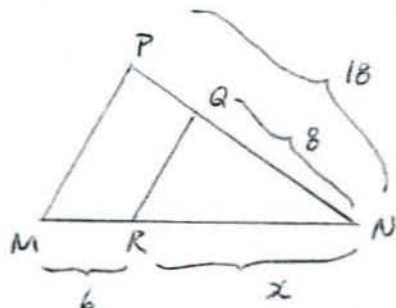
$$70 = 4x$$

$$x = \frac{70}{4}$$

$$x = 17,5$$

$$R/ \overline{MN} = 17,5$$

d)



$$\begin{aligned}\overline{MN} &= x+6 \\ \overline{PQ} &= 18-8 \\ \overline{QR} &= 10\end{aligned}$$

$$\frac{18}{10} = \frac{x+6}{6}$$

$$18 \cdot 6 = 10(x+6)$$

$$108 = 10x + 60$$

$$108 - 60 = 10x$$

$$10x = 48$$

$$x = \frac{48}{10}$$

$$x = 4,8$$

$$\frac{108 - 60}{48}$$

Otra forma:

$$\frac{18}{8} = \frac{x+6}{x}$$

$$18x = 8(x+6)$$

$$18x = 8x + 48$$

$$18x - 8x = 48$$

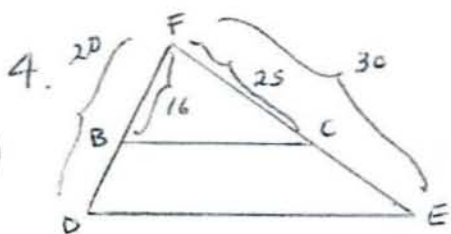
$$10x = 48$$

$$x = \frac{48}{10}$$

$$x = 4,8$$

$$R \parallel \overline{RN} = 4,8$$

a)



Si $\overline{BC} \parallel \overline{DE} \Rightarrow$ los triángulos FBC y FDE son semejantes y sus lados correspondientes deben ser proporcionales, es:

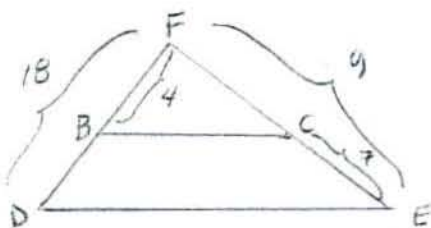
$$\frac{20}{16} = \frac{30}{25}$$

$$20 \cdot 25 \stackrel{?}{=} 16 \cdot 30$$

$$500 \neq 480$$

$\Rightarrow$ Como no son proporcionales, entonces $\overline{BC}$ no es paralela a $\overline{DE}$.

b)



$$\overline{FC} = 9 - 7 = 2$$

Se hace el mismo razonamiento anterior y tenemos que

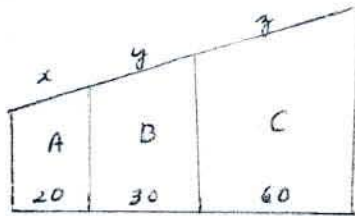
$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$18 \cdot 2 = 4 \cdot 9$$

$$36 = 36$$

En este caso los productos son iguales, entonces las lados correspondientes son proporcionales y $\overline{BC}$ es paralela a $\overline{DE}$.

5.



$$x + y + z = 180$$

frente en
calle Bonica

$$20 + 30 + 60 = 110$$

frente en calle Chorriz.

$$\frac{20}{x} = \frac{110}{180} \Rightarrow$$

$$110x = 20 \cdot 180 \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 180}{110} \Rightarrow$$

$$x = \frac{360}{11} \Rightarrow x = 32,72$$

$$\frac{30}{y} = \frac{110}{180} \Rightarrow$$

$$110y = 30 \cdot 180 \Rightarrow$$

$$y = \frac{30 \cdot 180}{110} \Rightarrow y = 49,09$$

$$\frac{60}{z} = \frac{110}{180} \Rightarrow$$

$$110z = 60 \cdot 180 \Rightarrow$$

$$z = \frac{60 \cdot 180}{110}$$

$$z = \frac{1080}{11} \Rightarrow z = 98,18$$

R// El lote A tiene un frente de 32,72 m, el lote B de 49,09 m y el lote C de 98,18 m, sobre la calle Bonica.

6. a) $\frac{6}{3} = 2$

$$\frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{10}{5} = 2$$

Si son semejantes ya que sus lados correspondientes son proporcionales (la razón es la misma).

Criterio : L.L.L.

b) Dos ángulos de ese Δ son ^{respectivamente} congruentes ya que son ángulos alternos internos entre paralelas. Los terceros ángulos son congruentes por ser opuestos por el vértice.

Criterio A.A.A.

- c) Como la suma de los ángulos internos de un Δ es 180° , entonces el ángulo que falta en cada Δ mide 57° en el primero y 88° en el segundo. Entonces esos Δ tienen sus ángulos congruentes y por el criterio AAA son semejantes.

Items de selección.

$$1. \quad \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{OM}}{20} = \frac{12}{16}$$

$$\Rightarrow \overline{OM} \cdot 16 = 20 \cdot 12$$

$$\overline{OM} = \frac{20 \cdot 12}{16}$$

$$\overline{OM} = 15$$

$$2. \quad \frac{\text{Perímetro } \Delta ABC}{\text{Perímetro } \Delta A'B'C'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{24} = \frac{\overline{BC}}{10}$$

$$\Rightarrow 36 \cdot 10 = 24 \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \frac{36 \cdot 10}{24}$$

$$\overline{BC} = 15$$

$$3. \quad \text{Si } \Delta DEF \sim \Delta MNT$$

$$\Rightarrow \angle F \cong \angle T$$

$$\angle T \rightarrow \alpha$$

$$m\angle F = 180 - (44 + 82)$$

$$\begin{array}{r} 44 + 180 - \\ 82 \\ \hline 126 \end{array} \quad \begin{array}{r} 126 \\ 54 \end{array}$$

$$m\angle F = 180 - 126$$

$$m\angle F = 54$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 54^\circ}}$$

$$4. \quad \frac{10}{x} = \frac{8}{20} \Rightarrow 10 \cdot 20 = 8x$$

$$x = \frac{10 \cdot 20}{8}$$

$$x = 25$$

$$5. \quad \frac{4}{14} = \frac{30}{15} \Rightarrow y = \frac{14 \cdot 30}{15}$$

$$y = 28$$

$$6. \quad \frac{8}{x} = \frac{12}{2x-1} \Rightarrow 8(2x-1) = 12x$$

$$16x - 8 = 12x$$

$$16x - 12x = 8$$

$$4x = 8$$

$$x = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

$$7. \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{NB}}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{\overline{AM}} = \frac{12}{5}$$

$$\overline{AM} \cdot 12 = 11 \cdot 5$$

$$\overline{AM} = \frac{11 \cdot 5}{12}$$

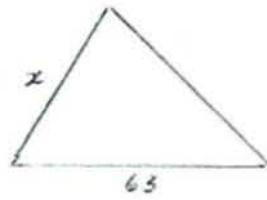
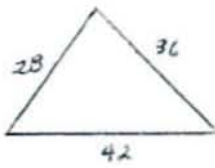
$$\overline{AM} = \frac{55}{12}$$

$$\overline{CB} = \overline{CN} + \overline{NB}$$

$$\overline{CB} = 7 + 5$$

$$\overline{CB} = 12$$

8.



$$\frac{28}{x} = \frac{42}{63}$$

$$x \cdot 42 = 28 \cdot 63$$

$$x = \frac{28 \cdot 63}{42}$$

$$x = \frac{28 \cdot 63}{42} = 42$$

$$9. \quad \frac{\overline{CB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$$

$$\frac{x+4}{4} = \frac{12}{3}$$

$$3(x+4) = 4 \cdot 12$$

$$3x + 12 = 48$$

$$3x = 48 - 12$$

$$3x = 36$$

$$x = \frac{36}{3}$$

$$x = 12$$

$$10. \quad \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{QR}}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{QS}{9}$$

$$5 \overline{QS} = 8 \cdot 9$$

$$\overline{QS} = \frac{72}{5}$$

$$\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$$

$$\overline{MP} = 5 + 3$$

$$\overline{MP} = 8$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad x + 2 &= 70 \\
 x &= 70 - 2 \\
 x &= 68
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad \frac{x}{8} &= \frac{16}{10} \implies 10x = 8 \cdot 16 \\
 x &= \frac{8 \cdot 16}{10} \\
 x &= \frac{64}{5} \\
 x &= 12,8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad \frac{16}{4} &= \frac{x}{8} \\
 4x &= 16 \cdot 8 \\
 x &= \frac{16 \cdot 8}{4} \\
 x &= 32
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad & \begin{array}{c} 8 \\ | \\ \hline 5,4 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ | \\ \hline 0,9 \end{array} \\
 & \frac{8}{5,4} = \frac{x}{0,9} \implies \\
 & 5,4 \cdot x = 8 \cdot 0,9 \\
 & x = \frac{8 \cdot 0,9}{5,4} \\
 & x = 1,33
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad \frac{x}{4} &= \frac{1,5}{6} \\
 6x &= 1,5 \cdot 4 \\
 x &= \frac{6,0}{6} \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

Matenotitas-Noveno Año

No. 300

Estimados compañeros(as):

El presente documento tratará el tema “El teorema de Pitágoras” y triángulos especiales, ambos, temas de gran importancia y utilidad. Espero que el documento sea de su agrado y le ayude en su labor en el aula.



Cualquier persona que haya estudiado álgebra o geometría ha oído hablar del Teorema de Pitágoras. Este famoso teorema es usado en muchas ramas de la Matemática, así como en construcción, arquitectura y mediciones.

Pitágoras es generalmente considerado como uno de los grandes matemáticos griegos, pero se sabe muy poco acerca de su persona. Nació alrededor de año 582 a.C. y vivió primero en la isla de Samos, en el mar Egeo, y más tarde en el sur de Italia.

Pitágoras y sus discípulos se dedicaron al estudio de la matemática, la astronomía y la filosofía. Sus conocimientos de astronomía fueron muy valiosos: en el siglo VI a.C. sabían que la tierra era redonda y que giraba alrededor del sol. No dejaron escritos de sus trabajos, y nadie sabe cómo lograron obtener estos conocimientos, ni cuáles de sus descubrimientos se debían a Pitágoras mismo.

A ellos se les atribuye el haber convertido la geometría en una ciencia. Demostraron el teorema de Pitágoras y descubrieron la existencia de los números irracionales. A pesar de que a este teorema se le dio nombre después de los matemáticos griegos, hay evidencia de él desde el tiempo de los babilonios de Hammurabi. Quizá el nombre es atribuido a Pitágoras porque el primer registro de pruebas escritas, proviene de su escuela.

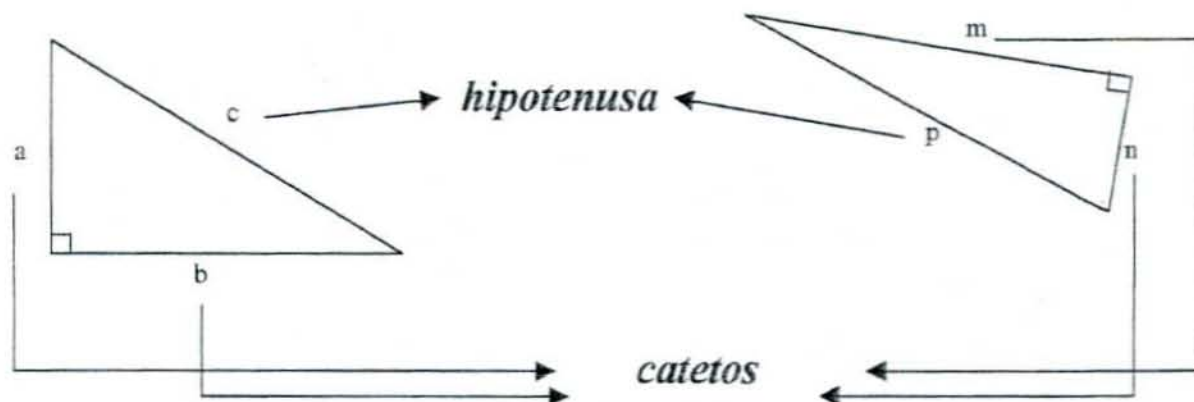
Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Es importante recordar que el Teorema de Pitágoras se aplica en cualquier triángulo rectángulo.

Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*.

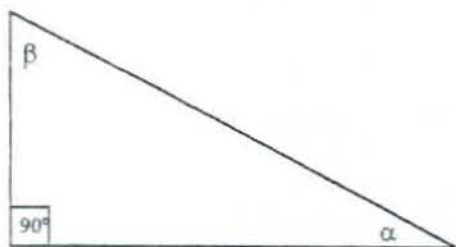
La hipotenusa de un triángulo rectángulo es además el lado de mayor longitud.



a y *b* son *catetos*
c es la *hipotenusa*

m y *n* son *catetos*
p es la *hipotenusa*

Como la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180° , entonces los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, es decir la suma de ellos es 90° .



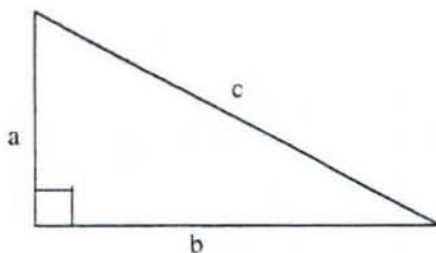
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

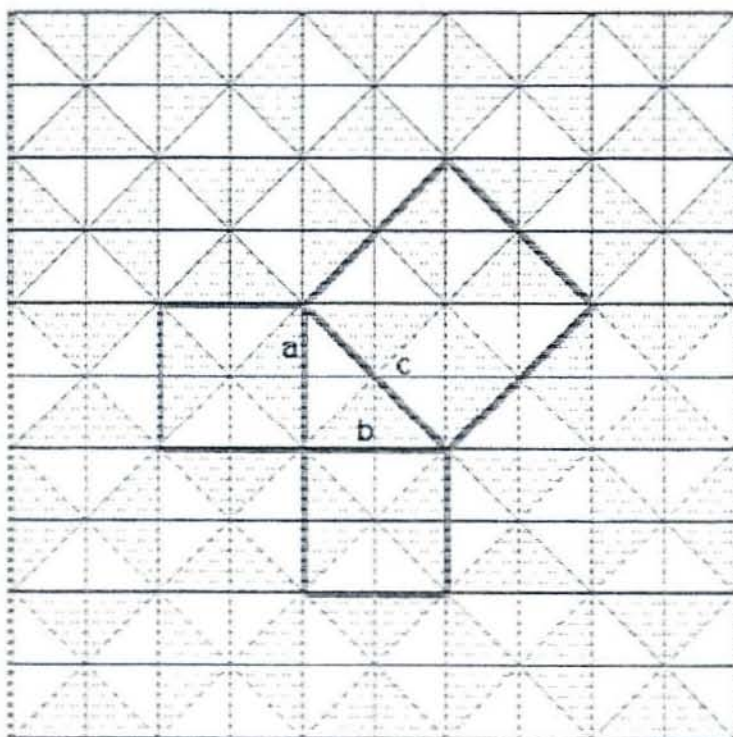
Teorema de Pitágoras

“En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos”.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

En la siguiente ilustración se presenta de una manera intuitiva este teorema. Al final de este documento encuentra la cuadrícula para que lo trabaje con sus estudiantes.



Para: Profesores de Telesecundaria

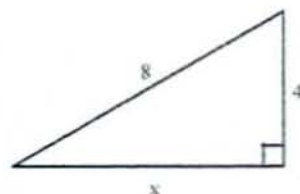
De: Ana C. Esquivel Fournier

Si contamos los triángulos en los cuadrados a y b , los catetos del triángulo rectángulo, observará que hay 8 en cada uno. El cuadrado en la hipotenusa del triángulo, c , contiene 16 triángulos. Se piensa que los babilonios usaron este patrón como una prueba del Teorema de Pitágoras¹.

Ejercicios resueltos

 En un triángulo rectángulo un cateto mide 4 cm y la hipotenusa mide 8 cm. Encontrar la medida del otro cateto

Por el Teorema de Pitágoras se cumple que



$$x^2 + 4^2 = 8^2$$

$$x^2 + 16 = 64$$

$$x^2 = 64 - 16$$

$$x^2 = 48$$

$$x = \sqrt{48}$$

$$x = \sqrt{2^4 \cdot 3}$$

$$x = 4\sqrt{3} \quad \text{ó} \quad x = 6,93$$

Respuesta: La medida del otro cateto es 6,93 cm.

¹ Tomado de <http://www.geom.unm.edu/ciencia/3337/Group3/flores.html>. Traducción libre,ace.

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

- ✎ Determinar la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 16 m de largo y 12 m de ancho.

Por el teorema de Pitágoras sabemos que

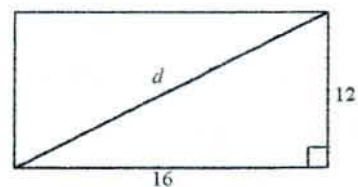
$$d^2 = 16^2 + 12^2$$

$$d^2 = 256 + 144$$

$$d^2 = 400$$

$$d = \sqrt{400}$$

$$d = 20$$



Respuesta: La diagonal del rectángulo mide 20 m.

- ✎ Una escalera de 12 m de longitud se encuentra recostada a una pared que es perpendicular al suelo. Si el pie de la escalera se encuentra a 5 m de la pared, ¿qué altura alcanza la escalera en la pared?

Por el Teorema de Pitágoras sabemos que

$$x^2 + 5^2 = 12^2$$

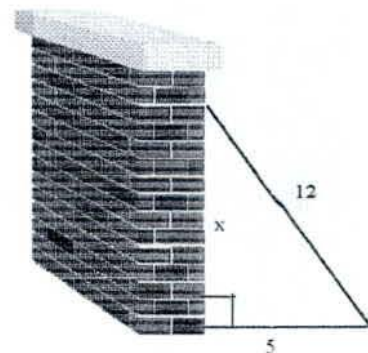
$$x^2 + 25 = 144$$

$$x^2 = 144 - 25$$

$$x^2 = 119$$

$$x = \sqrt{119}$$

$$x = 10,90$$



Respuesta: La altura que alcanza la escalera en la pared es de 10,90 m.

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

✎ Encontrar la medida del lado de un cuadrado cuya diagonal mide $7\sqrt{2}$ cm

Por el Teorema de Pitágoras se cumple que

$$x^2 + x^2 = (7\sqrt{2})^2$$

$$2x^2 = 49 \cdot 2$$

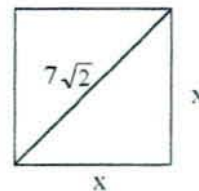
$$2x^2 = 98$$

$$x^2 = \frac{98}{2}$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \sqrt{49}$$

$$x = 7$$

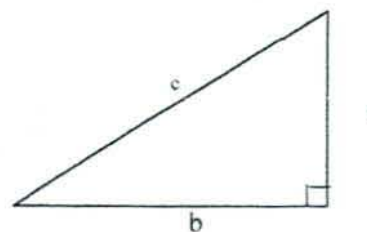


Respuesta: El lado del cuadrado mide 7 cm.

Ejercicio No. 1

1. En cada uno de los siguientes casos, encuentre el valor de la incógnita, para el triángulo de la derecha

- a) Si $a = 12$ y $b = 16$, entonces $c = ?$
- b) Si $a = 24$ y $c = 25$, entonces $b = ?$
- c) Si $a = 1$ y $b = 2$, entonces $c = ?$
- d) Si $b = 18$ y $c = 20$, entonces $a = ?$
- e) Si $a = 7$ y $b = 7$, entonces $c = ?$
- f) Si $a = 6$ y $c = 12$, entonces $b = ?$



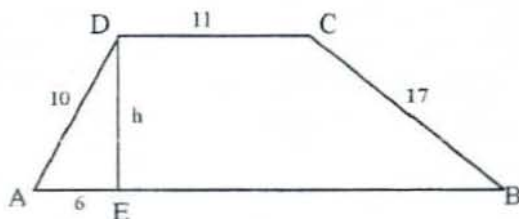
Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

2. Una persona camina 6 kilómetros hacia el norte, después 3 kilómetros hacia el este y, luego, 4 kilómetros hacia el sur. ¿A qué distancia está del punto de partida?
3. Los lados de un triángulo miden 6 cm, 10 cm y 12 cm, respectivamente. ¿Es este un triángulo rectángulo? ¿Si lo es, cuál de los lados es la hipotenusa?
4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de números podrían ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?
 - a) 30, 40, 60
 - b) 16, 30, 34
 - c) 10, 24, 26

Nota: Se conoce como *terna pitagórica* a un conjunto de tres números que satisfacen el teorema de Pitágoras.

5. ¿Cuáles de las siguientes ternas de números constituyen una terna pitagórica?
 - a) 8, 15, 17
 - b) 7, 10, 13
 - c) 9, 12, 15
6. El lado de un rombo mide 10 cm. Si la longitud de una de las diagonales es 12 cm, determinar el área del rombo.
7. En la figura de la derecha $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Si los segmentos tienen las longitudes indicadas en la figura, determine el área del trapecio.

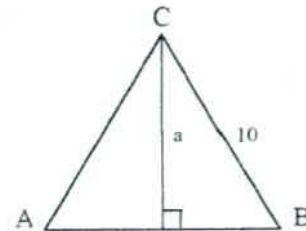


8. Determine la longitud de la diagonal de un cuadrado sabiendo que su lado mide
 - a) 9 cm
 - b) $\sqrt{6}$ cm

Para: Profesores de Telesecundaria

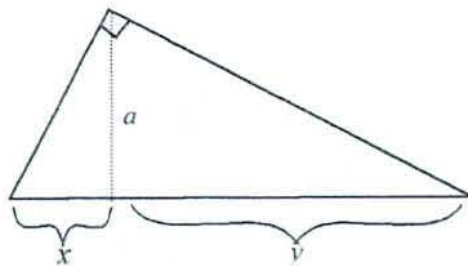
De: Ana C. Esquivel Fournier

9. El triángulo de la derecha es equilátero. Si la longitud de cada lado es 10 cm, ¿cuál es la longitud de la altura correspondiente a $\overline{AB}$? ¿Cuál es el área del ΔABC ?



Teorema de la altura

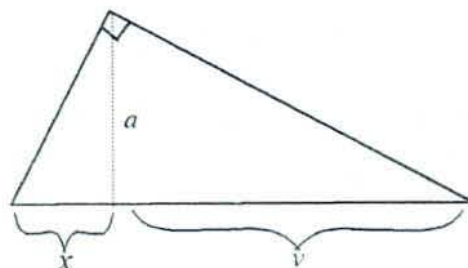
“En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos que esa altura determina sobre la hipotenusa”



$$a^2 = xy$$

Este teorema también puede enunciarse así:

“En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre las medidas de los dos segmentos que esta altura determina sobre la hipotenusa”



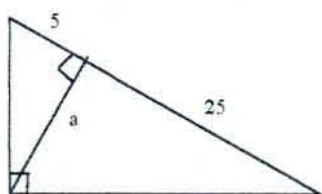
$$\frac{x}{a} = \frac{a}{y} \Rightarrow a^2 = xy$$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Ejercicios resueltos

- ✎ En un triángulo rectángulo la altura trazada sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos cuyas medidas son 25 cm y 5 cm. Determine la medida de esta altura.



$$a^2 = 5 \cdot 25$$

$$a^2 = 125$$

$$a = \sqrt{125}$$

$$a = 5\sqrt{5} \quad \text{ó} \quad 11,18$$

Respuesta: La medida de la altura trazada sobre la hipotenusa es 11,18 cm

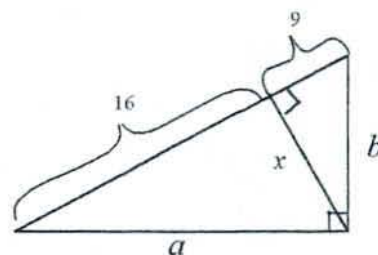
- ✎ La altura trazada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, determina en ella dos segmentos cuyas longitudes son 9 dm y 16 dm. Determine la longitud de cada cateto.

$$x^2 = 9 \cdot 16$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$



$$b^2 = x^2 + 9^2$$

$$b^2 = 12^2 + 9^2$$

$$b^2 = 144 + 81$$

$$b^2 = 225$$

$$b = \sqrt{225}$$

$$b = 15$$

$$a^2 = x^2 + 16^2$$

$$a^2 = 12^2 + 16^2$$

$$a^2 = 144 + 256$$

$$a^2 = 400$$

$$a = \sqrt{400}$$

$$a = 20$$

Respuesta: Los catetos miden 15 dm y 20 dm.

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Ítemes de selección

1. Si la longitud de la diagonal de un cuadrado es $15\sqrt{2}$ cm entonces el área de ese cuadrado corresponde a

() 15

() 60

() 225

() 30

2. ¿Cuál de las siguientes ternas de números es una terna pitagórica?

() 1, 2, 5

() 4, $4\sqrt{17}$, 16

() 2, 3, $\sqrt{2}$

() 6, 8, 24

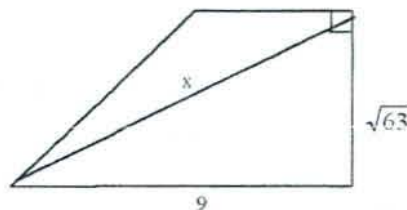
3. El valor de la diagonal x del trapecio de la derecha corresponde a

() 12

() 144

() $2\sqrt{7}$

() 28



Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

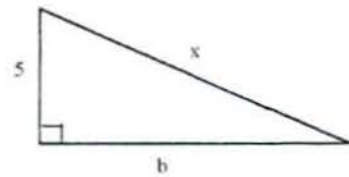
4. Si el área del triángulo adjunto es de 30 m^2 , entonces la hipotenusa mide

() 6 m

() 12 m

() 13 m

() 17 m



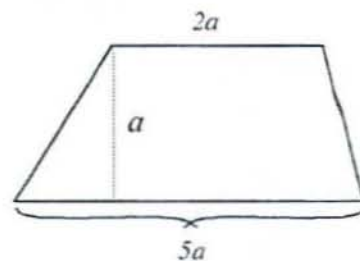
5. De acuerdo con los datos de la figura, si el área del trapecio es de 14 cm^2 entonces la altura " a " mide

() 2 cm

() $\sqrt{2}$ cm

() 4 cm

() $\sqrt{\frac{14}{5}}$ cm



6. La altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 20 cm es igual a

() $20\sqrt{3}$ cm

() 10

() $10\sqrt{5}$

() $10\sqrt{3}$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

7. Si la longitud de la diagonal de un cuadrado es 50 dm, entonces el perímetro del cuadrado es

() 1 250

() 200

() 5 000

() $100\sqrt{2}$

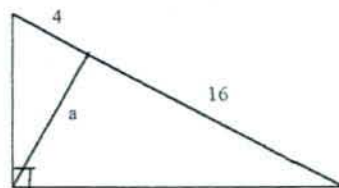
8. El valor de “a” en la figura adjunta corresponde a

() 64

() 8

() 20

() 40



9. La suma de los lados congruentes de un triángulo isósceles es 12 cm. Si la medida del lado desigual es 8 cm, entonces la longitud de la altura sobre ese lado es igual a

() 20 cm

() $4\sqrt{5}$ cm

() $2\sqrt{5}$ cm

() 10 cm

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

10. La diagonal mayor de un rombo mide 24 dm y la diagonal menor 10 dm. Entonces el lado de ese rombo mide

☐ 13 dm

☐ 17 dm

☐ 26 dm

☐ 60 dm

11. La altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide $8\sqrt{3}$ cm es igual a

☐ $4\sqrt{3}$ cm

☐ 12 cm

☐ $4\sqrt{6}$ cm

☐ 4 cm

12. El lado de un rombo mide $\sqrt{29}$ cm y una de sus diagonales mide 4 cm. ¿Cuánto mide en centímetros la otra diagonal?

☐ 25

☐ 5

☐ 50

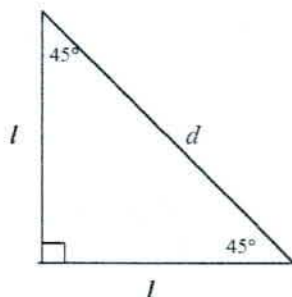
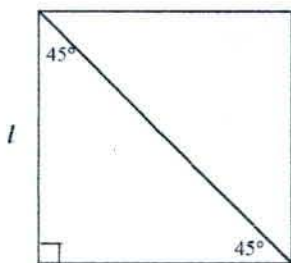
☐ 10

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

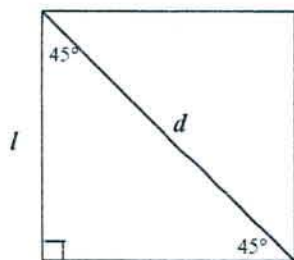
Triángulos especiales

Si trazamos una de las diagonales de un cuadrado este queda dividido en dos triángulos rectángulos. Como las diagonales de un cuadrado son bisectrices de los ángulos entonces cada uno de los nuevos ángulos mide 45° . Tenemos entonces la siguiente situación:



Cada uno de los catetos del triángulo rectángulo anterior corresponde al lado del cuadrado.

Mediante el Teorema de Pitágoras podemos calcular el valor de la diagonal de un cuadrado en términos del lado.



$$l^2 + l^2 = d^2$$

$$2l^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

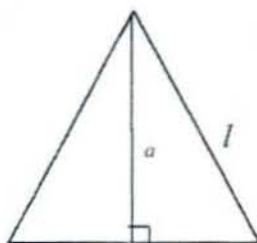
Nota:

Al triángulo anterior se le conoce como el triángulo 45-45-90 o más simple 45-45. Debemos recordar que éste es el triángulo rectángulo cuyos catetos tienen la misma longitud y cuya diagonal es igual a la longitud del lado multiplicado por $\sqrt{2}$.

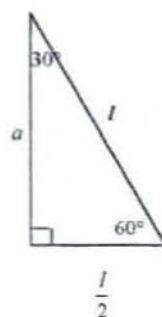
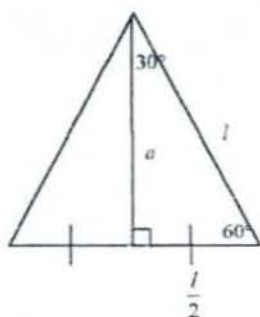
Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

Otro de los triángulos especiales es el que se forma al trazar la altura de un triángulo equilátero



Como en un triángulo equilátero la altura es también bisectriz, entonces el ángulo del cual ésta parte y que por ser un triángulo equilátero mide 60° , queda dividido en dos ángulos congruentes de medida 30° cada uno. Por otro lado como la altura es también mediana, entonces el lado sobre el cual cae, queda dividido en dos segmentos congruentes.



Podemos encontrar la altura de un triángulo equilátero en función de su lado aplicando el Teorema de Pitágoras, así:

$$a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$a^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$a^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4}$$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

$$a^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$a = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Nota:

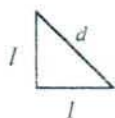
Al triángulo anterior se le conoce como el triángulo 30-60-90 o más simple 30-60. Debemos recordar que éste es el triángulo rectángulo cuyos catetos miden, uno la mitad de la hipotenusa y el otro la mitad de la hipotenusa multiplicado por $\sqrt{3}$.

Si bien es cierto que es importante recordar estas fórmulas porque pueden facilitarnos la resolución de problemas, es más importante recordar de dónde salen, pues aunque se olviden sabríamos cómo volver a obtenerlas.

Ejercicios resueltos:

 Determine la longitud de la diagonal de un cuadrado, si su lado mide 8 cm.

Ya anteriormente se resolvieron algunos problemas similares aplicando el Teorema de Pitágoras. Vamos a resolverlo ahora aplicando la fórmula



$$d = l\sqrt{2}$$

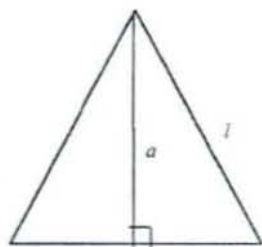
$$d = 8\sqrt{2}$$

Respuesta: La diagonal del cuadrado mide $8\sqrt{2}$ cm.

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

-  La medida de cada uno de los lados de un triángulo equilátero es 10 dm. Determine la medida de la altura.



$$l = 10 \text{ dm}$$
$$a = ?$$

$$a = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

$$a = \frac{10}{2}\sqrt{3}$$

$$a = 5\sqrt{3}$$

Respuesta: La altura del triángulo mide $5\sqrt{3}$ dm.

Items de selección

1. La altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 30 cm es igual a

() $30\sqrt{3}$ cm

() $15\sqrt{3}$ cm

() 30 cm

() 45 cm

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

2. Si en un triángulo rectángulo isósceles uno de los catetos mide $4\sqrt{2}$ dm, entonces la medida de la hipotenusa es

() $4\sqrt{2}$

() $8\sqrt{2}$

() 8

() 16

3. Si la medida del perímetro de un cuadrado es 64 m, entonces la longitud de la diagonal es

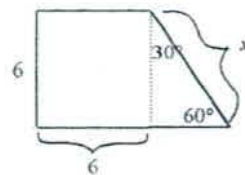
() $64\sqrt{2}$

() $8\sqrt{2}$

() $16\sqrt{2}$

() 128

4. Determine el valor de x en la figura de la derecha



() $4\sqrt{3}$

() 3

() 6

() $\sqrt{3}$

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

4. Si el perímetro de un triángulo equilátero es 30 cm, entonces el área de dicho triángulo es

() $10 \sqrt{3} \text{ cm}^2$

() $25 \sqrt{3} \text{ cm}^2$

() $50 \sqrt{3} \text{ cm}^2$

() $50 \sqrt{3} \text{ cm}^2$

Respuestas

Ejercicio No. 1, página 74

1. a) $c = 20$ b) $b = 7$ c) $c = \sqrt{5}$

d) $a = 2 \sqrt{19}$ e) $c = 7 \sqrt{2}$ f) $b = 6 \sqrt{3}$

2. 6,7 km

3. No es un triángulo rectángulo

4. a) No es triángulo rectángulo

b) Si es triángulo rectángulo

c) Si es triángulo rectángulo

5. a) Si forman una terna pitagórica

b) No forman una terna pitagórica

c) Si forman una terna pitagórica

6. 96 cm^2

7. El área del trapecio es 172

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

8. a) $9\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$
9. La altura es $5\sqrt{3}$ cm y el área $25\sqrt{3}$ cm²

Items de selección, página 78

1. c 2. b 3. a 4. c 5. a 6. d
7. d 8. b 9. c 10. a 11. b 12. d

Items de selección, página 85

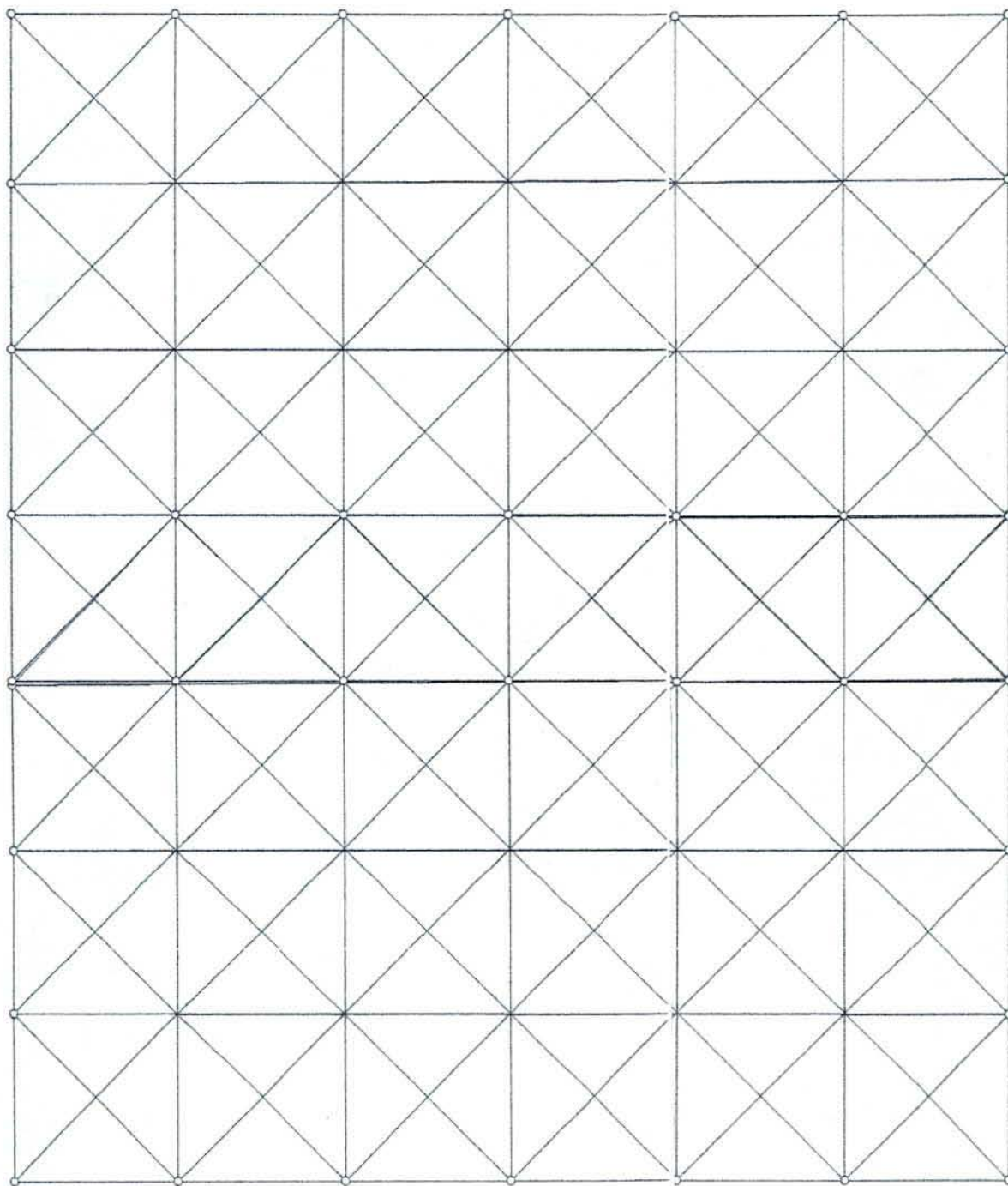
1. b 2. c 3. c 4. a 5. b

Bibliografía

-  Calderón Solano, Manuel. **Matemáticas. Ejercicios 9º Año.** Σ Raíz de Sigma.
-  Meneses Rodríguez, Roxana. **Matemática Enseñanza-Aprendizaje 9 Año.** 2 edición. San José, Costa Rica. Ediciones Farben S.A. 1991
-  Rodríguez C. y Suazo M. **Geometría.** Illinois, USA. Scott, Foresman and Co. 1989
-  Moise, Edwin y Downs, Floyd. **Serie Matemática Moderna. Geometría.** 2da. edición. Cali, Colombia. Editorial Norma. 1972

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier



Resolución de los ejercicios

Ejercicio N° 1, página 6

1. a) $a = 12$
 $b = 16$
 $c = ?$

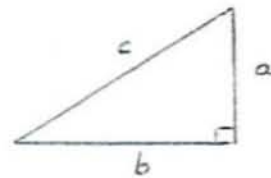
$$12^2 + 16^2 = c^2$$

$$144 + 256 = c^2$$

$$c^2 = 400$$

$$c = \sqrt{400}$$

$$\underline{\underline{c = 20}}$$



b) $a = 24$
 $c = 25$
 $b = ?$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$24^2 + b^2 = 25^2$$

$$576 + b^2 = 625$$

$$b^2 = 625 - 576$$

$$b^2 = 49$$

$$b = \sqrt{49}$$

$$\underline{\underline{b = 7}}$$

c) $a = 1$
 $b = 2$
 $c = ?$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1^2 + 2^2 = c^2$$

$$1 + 4 = c^2$$

$$5 = c^2$$

$$\underline{\underline{c = \sqrt{5}}}$$

d) $b = 18$
 $c = 20$
 $a = ?$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 18^2 = 20^2$$

$$a^2 + 324 = 400$$

$$a^2 = 400 - 324$$

$$a^2 = 76$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{76}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = 2\sqrt{19}}}$$

$$\begin{array}{r} 76 \overline{) 2} \\ 38 \overline{) 2} \\ 19 \overline{) 19} \end{array}$$

$$\begin{aligned} e) \quad a &= 7 \\ b &= 7 \\ c &= ? \end{aligned}$$

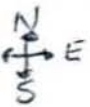
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 7^2 + 7^2 &= c^2 \\ 49 + 49 &= c^2 \\ c^2 &= 98 \\ c &= \sqrt{98} \\ c &= \sqrt{7^2 \cdot 2} \\ \underline{\underline{c &= 7\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

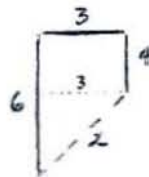
$$\begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 2 \\ \hline 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f) \quad a &= 6 \\ c &= 12 \\ b &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 6^2 + b^2 &= 12^2 \\ 36 + b^2 &= 144 \\ b^2 &= 144 - 36 \\ b^2 &= 108 \\ b &= \sqrt{108} \\ b &= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} \\ \underline{\underline{b &= 6\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

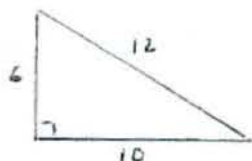
2. 0 



$$\begin{aligned} 6^2 + 3^2 &= x^2 \\ 36 + 9 &= x^2 \\ 45 &= x^2 \\ x &= \sqrt{45} \\ x &= \sqrt{9 \cdot 5} \\ \underline{\underline{x &= 3\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

R/ Está a $3\sqrt{5}$ km. o
6,7 km.

3.



$$12^2 \stackrel{?}{=} 6^2 + 10^2$$

$$144 \stackrel{?}{=} 36 + 100$$

$$144 \neq 136$$

R/ No es un triángulo rectángulo.

4. a) 30, 40, 60

$$60^2 \stackrel{?}{=} 30^2 + 40^2$$

$$3600 \stackrel{?}{=} 900 + 1600$$

$$3600 \neq 2500$$

No.

b) 16, 30, 34

$$34^2 \stackrel{?}{=} 16^2 + 30^2$$

$$1156 \stackrel{?}{=} 256 + 900$$

$$1156 = 1156$$

Si pueden ser los lados de un Δ rectángulo.

c) 10, 24, 26

$$26^2 \stackrel{?}{=} 10^2 + 24^2$$

$$676 \stackrel{?}{=} 100 + 576$$

$$676 = 676$$

Si pueden ser los lados de un Δ rectángulo.

5. a) 8, 15, 17

$$17^2 \stackrel{?}{=} 8^2 + 15^2$$

$$289 \stackrel{?}{=} 64 + 225$$

$$289 = 289$$

Si forman una terna pitagórica.

b) 7, 10, 13

$$13^2 \stackrel{?}{=} 7^2 + 10^2$$

$$169 \stackrel{?}{=} 49 + 100$$

$$169 \neq 149$$

No forman una terna pitagórica

c) 9, 12, 15

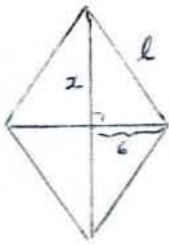
$$15^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 12^2$$

$$225 \stackrel{?}{=} 81 + 144$$

$$225 = 225$$

Si forman una terna pitagórica.

6.



$$l = 10 \text{ cm}$$

$$d = 12 \text{ cm}$$

$$A = ?$$

$$x^2 + 6^2 = l^2$$

$$x^2 + 36 = 10^2$$

$$x^2 = 100 - 36$$

$$x = \sqrt{64}$$

$$x = 8$$

$$D = 2x$$

$$D = 16$$

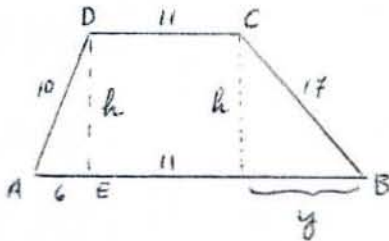
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A = \frac{16 \cdot 12}{2}$$

$$A = 96$$

R/ El área del rombo es 96 cm^2

7.



$$A = \frac{(DC + AB) \cdot h}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad h^2 + 6^2 = 10^2$$

$$h^2 + 36 = 100$$

$$h^2 = 100 - 36$$

$$h = \sqrt{64}$$

$$h = 8$$

$$\textcircled{2} \quad h^2 + y^2 = 17^2$$

$$8^2 + y^2 = 289$$

$$y^2 = 289 - 64$$

$$y^2 = 225$$

$$y = \sqrt{225}$$

$$y = 15$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{AB} = 6 + 11 + 15$$

$$\overline{AB} = 32$$

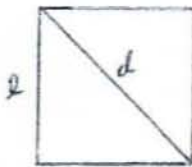
$$\textcircled{4} \quad A = \frac{(11 + 32) \cdot 8}{2}$$

$$A = 43 \cdot 4$$

$$A = 172$$

R/ El área del trapezio es 172.

8.



$$a) \quad l = 9 \text{ cm}$$

$$l^2 + l^2 = d^2$$

$$9^2 + 9^2 = d^2$$

$$81 + 81 = d^2$$

$$162 = d^2$$

$$d = \sqrt{162}$$

$$d = \sqrt{39.2}$$

$$d = 9\sqrt{2}$$

$$b) \quad l = \sqrt{6} \text{ cm}$$

$$l^2 + l^2 = d^2$$

$$(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 = d^2$$

$$6 + 6 = d^2$$

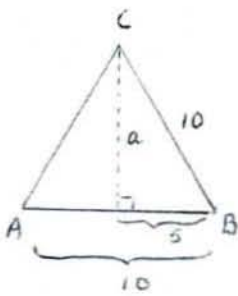
$$12 = d^2$$

$$d = \sqrt{12}$$

$$d = \sqrt{4 \cdot 3}$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

9.



$$l = 10 \text{ cm}$$

$$a = ?$$

$$A_{\Delta} = ?$$

$$a^2 + 5^2 = 10^2$$

$$a^2 = 100 - 25$$

$$a^2 = 75$$

$$a = \sqrt{75}$$

$$a = \sqrt{25 \cdot 3}$$

$$a = 5\sqrt{3}$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot d}{2}$$

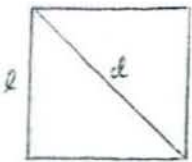
$$A = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 25\sqrt{3}$$

R/ La altura del triángulo es $5\sqrt{3} \text{ cm}$ y el área $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Ítem de selección, página 10.

1.



$$d = 15\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A = ?$$

$$A = l^2$$

$$\textcircled{1} l^2 + l^2 = d^2$$

$$2l^2 = (15\sqrt{2})^2$$

$$2l^2 = 225 \cdot 2$$

$$l^2 = \frac{225 \cdot 2}{2}$$

$$l = \sqrt{225}$$

$$l = 15$$

$$\textcircled{2} A = l^2$$

$$A = 15^2$$

$$\underline{\underline{A = 225}}$$

2.

$$1^2 + 2^2 \stackrel{?}{=} 5^2$$

$$1 + 4 \stackrel{?}{=} 25$$

$$5 \neq 25$$

No es un polígono

$$4^2 + 16^2 \stackrel{?}{=} (4\sqrt{17})^2$$

$$16 + 256 \stackrel{?}{=} 16 \cdot 17$$

$$272 = 272$$

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 \stackrel{?}{=} (\sqrt{2})^2$$

$$4 + 2 \stackrel{?}{=} 2$$

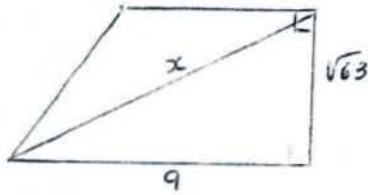
$$6 \neq 2$$

$$6^2 + 8^2 \stackrel{?}{=} 24^2$$

$$36 + 64 \stackrel{?}{=} 576$$

$$100 \neq 576$$

3.



$$x^2 = 9^2 + (\sqrt{63})^2$$

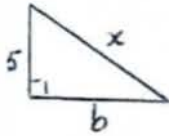
$$x^2 = 81 + 63$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$

4.



$$A = 30 \text{ m}^2$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$= \frac{b \cdot 5}{2}$$

$$60 = b \cdot 5$$

$$\frac{60}{5} = b$$

$$b = 12$$

$$5^2 + 12^2 = x^2$$

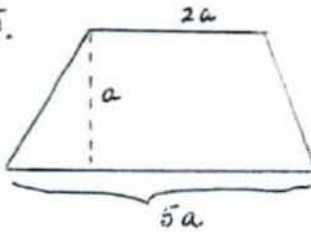
$$25 + 144 = x^2$$

$$169 = x^2$$

$$x = \sqrt{169}$$

$$\underline{\underline{x = 13}}$$

5.



$$A = 14 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{(B+b) \cdot a}{2}$$

$$14 = \frac{(2a + 5a) \cdot a}{2}$$

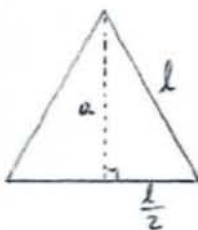
$$28 = 7a \cdot a$$

$$\frac{28}{7} = a^2$$

$$a = \sqrt{4}$$

$$a = 2$$

6.



$$l = 20$$

$$\frac{l}{2} = 10$$

$$a^2 + 10^2 = 20^2$$

$$a^2 + 100 = 400$$

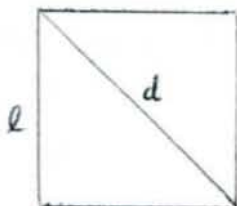
$$a^2 = 400 - 100$$

$$a^2 = 300$$

$$a = \sqrt{300} \Rightarrow a = \sqrt{100 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{a = 10\sqrt{3}}}$$

7.



$$d = 50 \text{ dm}$$

$$P = ?$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad l^2 + l^2 &= d^2 \\ 2l^2 &= 50^2 \\ 2l^2 &= 2500 \end{aligned}$$

$$l^2 = \frac{2500}{2}$$

$$l^2 = 1250$$

$$l = \sqrt{1250}$$

$$l = \sqrt{5^4 \cdot 2}$$

$$l = 25\sqrt{2}$$

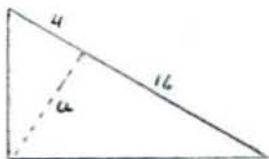
$$\begin{array}{r|l} 1250 & 2 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad P = 4l$$

$$P = 4 \cdot 25\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{P = 100\sqrt{2}}}$$

8.



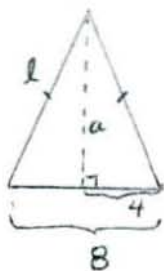
$$a^2 = 4 \cdot 16$$

$$a^2 = 64$$

$$a = \sqrt{64}$$

$$\underline{\underline{a = 8}}$$

9.



$$l + l = 12$$

$$l = 6$$

$$a = ?$$

$$a^2 + 4^2 = 6^2$$

$$a^2 + 16 = 36$$

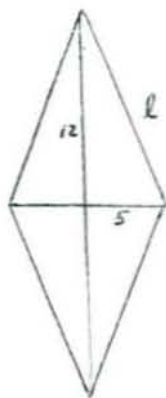
$$a^2 = 36 - 16$$

$$a = \sqrt{20}$$

$$a = \sqrt{4 \cdot 5}$$

$$\underline{\underline{a = 2\sqrt{5}}}$$

10.



$$D = 24 \text{ dm}$$

$$d = 10 \text{ dm}$$

$$l = ?$$

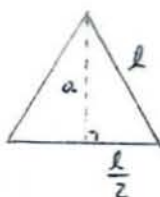
$$l^2 = 12^2 + 5^2$$

$$l^2 = 144 + 25$$

$$l = \sqrt{169}$$

$$\underline{\underline{l = 13}}$$

11.



$$l = 8\sqrt{3}$$

$$a = ?$$

$$\frac{l}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$a^2 + (4\sqrt{3})^2 = (8\sqrt{3})^2$$

$$a^2 + 16 \cdot 3 = 64 \cdot 3$$

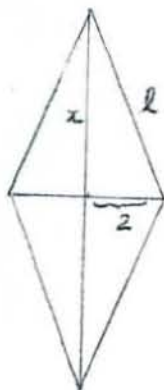
$$a^2 + 48 = 192$$

$$a^2 = 192 - 48$$

$$a = \sqrt{144}$$

$$\underline{\underline{a = 12}}$$

12.



$$l = \sqrt{29} \text{ cm}$$

$$d = 4 \text{ cm}$$

$$D = ?$$

$$x^2 + 2^2 = l^2$$

$$x^2 + 4 = (\sqrt{29})^2$$

$$x^2 = 29 - 4$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

$$D = 2x$$

$$D = 2 \cdot 5$$

$$\underline{\underline{D = 10}}$$

Nota: Muchos de los ejercicios anteriores pueden resolverse aplicando la fórmula para la diagonal de un cuadrado y la altura de un triángulo equilátero (como se resuelven los siguientes).

Ítem de selección, página 17.

1.

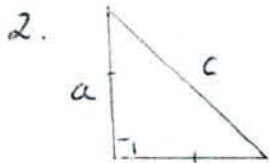
$$a = ?$$

$$l = 30$$

$$a = \frac{l}{2} \sqrt{3}$$

$$a = \frac{30}{2} \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{a = 15\sqrt{3}}}$$



$$a = 4\sqrt{2} \text{ dm}$$

$$c = ?$$

$$(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = c^2$$

$$16 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = c^2$$

$$32 + 32 = c^2$$

$$64 = c^2$$

$$c = \sqrt{64}$$

$$\underline{\underline{c = 8}}$$

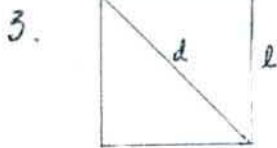
Otra forma

$$c = a\sqrt{2}$$

$$c = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$c = 4 \cdot 2$$

$$\underline{\underline{c = 8}}$$



$$P = 64 \text{ m}$$

$$d = ?$$

$$P = 4l$$

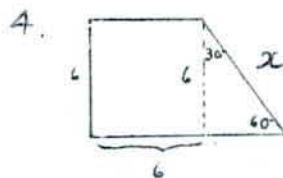
$$64 = 4l$$

$$\frac{64}{4} = l$$

$$l = 16$$

$$d = l\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{d = 16\sqrt{2}}}$$



$$6 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

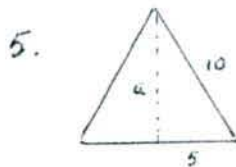
$$6 \cdot 2 = x\sqrt{3}$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = x$$

$$x = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{\underline{x = 4\sqrt{3}}}$$



$$P = 30 \text{ cm}$$

$$A = ?$$

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

$$l = 10$$

$$a^2 + 5^2 = 10^2$$

$$a^2 = 100 - 25$$

$$a = \sqrt{75}$$

$$a = \sqrt{25 \cdot 3}$$

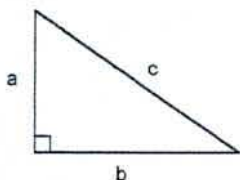
$$a = 5\sqrt{3}$$

$$A = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\underline{A = 25\sqrt{3}}}$$

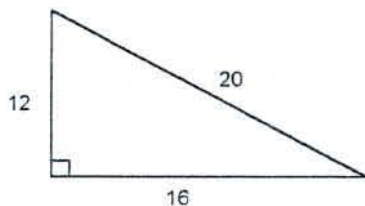
Clasificación de un triángulo conociendo la medida de sus lados

Un triángulo es **rectángulo** cuando el **cuadrado** del lado **mayor** es **igual** que la **suma** de los **cuadrados** de los otros dos lados.



$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \text{el triángulo es rectángulo}$$

Ejemplo:



$$12^2 = 144$$

$$16^2 = 256$$

$$20^2 = 400$$

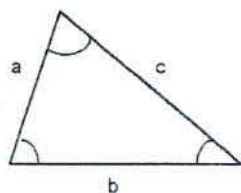
$$144 + 256 = 400$$

$$400 = 400$$

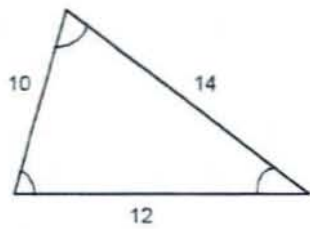
$$\Rightarrow 12^2 + 16^2 = 20^2$$

$$\Rightarrow \text{el triángulo es rectángulo}$$

Un triángulo es **acutángulo** cuando el **cuadrado** del lado **mayor** es **menor** que la **suma** de los **cuadrados** de los otros dos lados.



$$c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow \text{el triángulo es acutángulo}$$



$$12^2 = 144$$

$$10^2 = 100$$

$$14^2 = 196$$

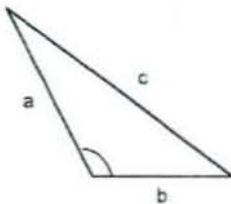
$$144 + 100 = 244$$

$$196 < 244$$

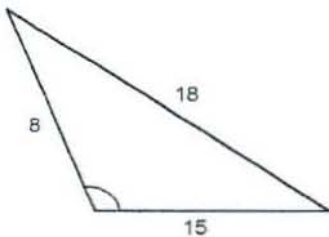
$$\Rightarrow 14^2 < 12^2 + 10^2$$

$\Rightarrow$ el triángulo es acutángulo

Un triángulo es **obtusángulo** cuando el **cuadrado** del lado **mayor** es **mayor** que la **suma** de los **cuadrados** de los otros dos lados.



$$c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow \text{el triángulo es obtusángulo}$$



$$8^2 = 64$$

$$15^2 = 225$$

$$18^2 = 324$$

$$64 + 225 = 289$$

$$324 > 289$$

$$\Rightarrow 18^2 > 8^2 + 15^2$$

$\Rightarrow$ el triángulo es obtusángulo

DIVISION DE PLANEAMIENTO
Y DESARROLLO EDUCATIVO

Para: Profesores de Telesecundaria

De: Ana C. Esquivel Fournier

